平成 29 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

3 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする △OAB がある．ただし，O は原点とする．△OAB の外心を P とする．3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，

$$\alpha\beta=z$$

が成り立つとする．

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

4 さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う．初め点 P は原点 0 にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2) p_9 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．

(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2 \quad \cdots(*)$ より

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

n，k は自然数であるから，$n \geqq 1$，$2k-1>0$ より

$$a \geqq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq k^2+2k-1 \quad \cdots(**)$$

(2) $(*)$ において，$a=14$ であるから，このとき，$(**)$ により

$$14 \geqq k^2+2k-1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+5)(k-3) \leqq 0$$

これを満たす自然数 k は　1, 2, 3

① より，$n=\dfrac{14-k^2}{2k-1}$ であるから

k	1	2	3
n	13	$\frac{10}{3}$	1

よって，求める自然数 n は　**1，13**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$ を微分すると　$f'(x) = x\sin x$

したがって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は次にようになる．

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

よって，最大値 $f(\pi) = \mathbf{1+\boldsymbol{\pi}}$，最小値 $f(2\pi) = \mathbf{1-2\boldsymbol{\pi}}$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \boldsymbol{x - 2\cos x - x\sin x + C}$ **($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

(3) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ であるから，(1) の増減表により

$$0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2} \text{で } f(x) \geqq 0, \quad \frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \text{で } f(x) \leqq 0$$

(2) の結果から $F(x) = x - 2\cos x - x\sin x$ とおくと，

$$F(0) = -2, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi, \quad F(2\pi) = 2\pi - 2$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,dx \\
&= \Big[\, F(x) \,\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} - \Big[\, F(x) \,\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(0) - F(2\pi) \\
&= 2\cdot 3\pi - (-2) - (2\pi - 2) = \mathbf{4\boldsymbol{\pi} + 4}
\end{aligned}$$

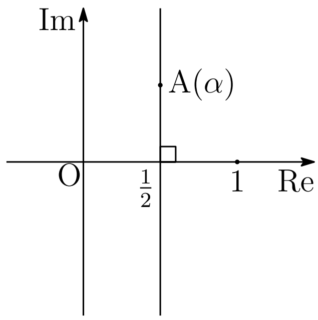
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) O(0)，A(α)，B(β)，P($\alpha\beta$) について，P は △OAB の外心であるから

$$|\mathrm{OP}| = |\mathrm{AP}| = |\mathrm{BP}| \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha| = |\alpha\beta - \beta|$$

したがって　$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1| = |\beta||\alpha - 1|$

すなわち　$|\alpha| = |\alpha - 1|$，$|\beta| = |\beta - 1|$

よって，A(α) が描く描く図形は，右の図のように 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線である．



(2) (1) で示したように，B(β) も 2 点 0, 1 を結ぶ垂直二等分線上にあるから

$$\alpha = \frac{1}{2} + si, \quad \beta = \frac{1}{2} + ti, \quad z = x + yi$$

とおくと ($s,\ t,\ x.\ y$ は実数)，$z = \alpha\beta$ より

$$x + yi = \left(\frac{1}{2} + si\right)\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \frac{1}{4} - st + \frac{1}{2}(s+t)i$$

したがって　$x = \frac{1}{4} - st,\ \ y = \frac{1}{2}(s+t)$　ゆえに　$s + t = 2y,\ \ st = \frac{1}{4} - x$

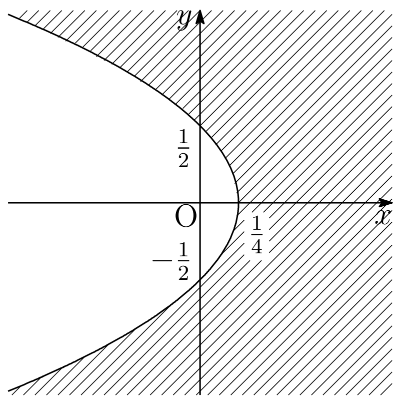
このとき，s，t を解とする 2 次方程式は

$$\lambda^2 - (s+t)\lambda + st = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - 2y\lambda + \frac{1}{4} - x = 0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ は，異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-y)^2 - 1\left(\frac{1}{4} - x\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x > -y^2 + \frac{1}{4}$$

よって，P(z) の描く図形は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 1 回目から 9 回目まで 1 の目が出る確率であるから (10 回目は任意の目)

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

(2) 9 回目で P の座標が 10 以上になるのは，次の場合である．

(i) 8 回目まですべての 1 の目が出て，9 回目で 2 以上出る確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{8} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6^9}$$

(ii) 1 回目から 8 回目までに 1 回だけ 2 の目が出てそれ以外は 1 の目が出る確率は (9 回目は任意の目)

$${}_8\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{8} = \frac{8}{6^8}$$

(i)，(ii) より，求める確率は $\quad \dfrac{5}{6^9} + \dfrac{8}{6^8} = \boldsymbol{\dfrac{53}{6^9}}$

(3) 1，2，3 回目に出た目を順に i，j，k とすると，$4 \leqq i + j \leqq 9$ であるから，このときの (i, j) の組の数および k の場合の数は，次のようになる

$i+j$	4	5	6	7	8	9
(i, j) の個数	3	4	5	6	5	4
k の個数	1	2	3	4	5	6

よって，求める確率は

$$p_3 = \frac{3\cdot1 + 4\cdot2 + 5\cdot3 + 6\cdot4 + 5\cdot5 + 4\cdot6}{6^3} = \frac{99}{216} = \boldsymbol{\frac{11}{24}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2)

P$(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$ より

$$(x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqq a$$

したがって，D の表す領域は　$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq \dfrac{a-4}{3}$　$\cdots(*)$

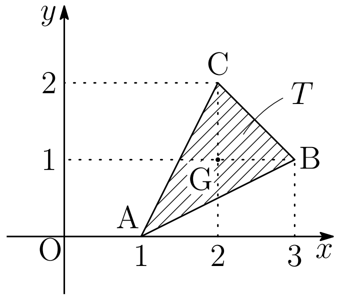
よって，D が少なくとも 1 点 P を含む a の値の範囲は

$$\frac{a-4}{a} \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \geqq 4}$$

(2) $(*)$ より，D は点 (2, 1) を中心とする半径

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}$$

の円の内部であるから，G(2, 1) とすると



$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \mathrm{GA}$$

を満たせばよい．$\mathrm{GA} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a \geqq 10}$$

(3) 点 G(2, 1) から 3 直線

$$\mathrm{AB} : x - 2y - 1 = 0, \quad \mathrm{AC} : 2x - y - 2, \quad \mathrm{BC} : x + y - 3 = 0$$

までの距離は，それぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$(*)$ により

$$0 \leqq \sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{4 \leqq a \leqq \frac{23}{5}}$$