平成 28 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある．a を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ．

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ．

2 $a > 0$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right\} dt$$

をみたすとする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < a \leqq 2\pi$ において，

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ．

3 机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている．ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである．

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(2) ひきだし A，B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(3) ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

4 (1) 次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ．

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

(2) 方程式 ① の 3 つの実数解を $s,\ t,\ u$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の a_n がすべて整数であることを示せ．

5 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，B$(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を ℓ とし，2 点 C$(1,\ 0,\ 0)$，D$(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を m とする．a を定数として，ℓ 上にも m 上にもない点 P$(s,\ t,\ a)$ を考える．

(1) P から ℓ に下ろした垂線と ℓ の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする．Q，R の座標をそれぞれ $s,\ t,\ a$ を用いて表せ．

(2) P を中心とし，ℓ と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ．

(3) $s,\ t$ と定数 a が (2) の条件をみたすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ．

解答例

1 (1) $w = z^2 - 2az + 1$ (a は実数，$|z| = 2$) より

$$\begin{aligned}|w|^2 &= w\overline{w} = (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)\\ &= \{(z^2 - 2az) + 1\}\{(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\}\\ &= (z^2 - 2az)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + (z^2 - 2az) + (\overline{z}^2 - 2a\overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}(z - 2a)(\overline{z} - 2a) + z^2 + \overline{z}^2 - 2a(z + \overline{z}) + 1\\ &= z\overline{z}\{z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 4a^2\} + (z + \overline{z})^2 - 2z\overline{z} - 2a(z + \overline{z}) + 1\end{aligned}$$

$z\overline{z} = |z|^2 = 4$，$z + \overline{z} = 2x$ であるから

$$\begin{aligned}|w|^2 &= 4\{4 - 2a{\cdot}2x + 4a^2\} + (2x)^2 - 2{\cdot}4 - 2a{\cdot}2x + 1\\ &= \boldsymbol{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$f(x) = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$ とおくと

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 + 9 - 9a^2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする．

(i) $\dfrac{5a}{2} \leqq -2$，すなわち，$a \leqq -\dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f(-2) = 16a^2 + 40a + 25 = (4a + 5)^2$$

(ii) $-2 \leqq \dfrac{5a}{2} \leqq 2$，すなわち，$-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}$ のとき

$$m = f\left(\frac{5a}{2}\right) = 9 - 9a^2$$

(iii) $2 \leqq \dfrac{5a}{2}$，すなわち，$\dfrac{4}{5} \leqq a$ のとき

$$m = f(2) = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2$$

(i)〜(iii) より，$|w|$ の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -\dfrac{4}{5}} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{|4a + 5|}\\ \boldsymbol{-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{3\sqrt{1 - a^2}}\\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5} \leqq a} & \text{のとき} \quad \boldsymbol{|4a - 5|}\end{cases}$$

■

2 (1) 与えられた関数 $f(x)$ から $(a>0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt \\ &= \frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt = e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

$k=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+k$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-a}^{a}(e^{-t}+k)\sin t\,dt = \int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+k\int_{-a}^{a}\sin t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\,e^{-t}(\sin t+\cos t)\,\Big]_{-a}^{a}+k\Big[-\cos t\,\Big]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a}$

(2) $k=g(a)$ であるから

$$\begin{aligned} g(a) &= -\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a \\ g'(a) &= -(e^{a}-e^{-a})\sin a \end{aligned}$$

したがって，$0\leqq a\leqq 2\pi$ における $g(a)$ の増減は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は　$g(\pi)=\boldsymbol{\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}}$ ■

3 (1) ひきだし A のメダルの色が 1 種類または 3 種類である確率は

$$\frac{3}{3^3}+\frac{3!}{3^3}=\frac{1}{3}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(2) 2 種類のメダルの色が金，銀である確率は　$\frac{2^5-2}{3^3\cdot 2^2}=\frac{30}{108}$

2 種類のメダルの色が金，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3\cdot 2^2}=\frac{7}{108}$

2 種類のメダルの色が銀，銅である確率は　$\frac{(2^3-1)\times 1}{3^3\cdot 2^2}=\frac{7}{108}$

よって，求める確率は　$\frac{30}{108}+\frac{7}{108}+\frac{7}{108}=\mathbf{\frac{11}{27}}$

(3) (i) A に 3 枚の金メダルが入る場合は　$1\times 1=1$ (通り)

(ii) A に 2 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_2\cdot 2\times {}_2\mathrm{C}_1\cdot 1=12$ (通り)

(iii) A に 1 枚の金メダルが入る場合は　${}_3\mathrm{C}_1\cdot 2^2\times {}_2\mathrm{C}_2=12$ (通り)

ひきだし A のメダルの色が 2 種類であるのは，(ii) の場合と，(iii) において 1 枚の金メダル以外の残りの 2 枚のメダルが同色である場合であるから，その総数は

$$12+{}_3\mathrm{C}_1\cdot 2\times {}_2\mathrm{C}_2=18 \text{ (通り)}$$

よって，求める条件付き確率は　$\frac{18}{1+12+12}=\mathbf{\frac{18}{25}}$ ■

4 (1) $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおくと　$f'(x)=3x^2+2x-2$

2 次方程式 $f'(x)=0$ の係数について

$$D/4=1^2-3\cdot(-2)=7>0$$

したがって，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもつ．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x)=x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

また，$f'(x)=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{9}\right)-\dfrac{7}{9}(2x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=\frac{49}{81}(2\alpha+1)(2\beta+1)=\frac{49}{81}\{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1\}\\&=\frac{49}{81}\left\{4\left(-\frac{2}{3}\right)+2\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right\}=-\frac{49}{27}<0\end{aligned}$$

上の結果と増減表により　$f(\alpha)>0$，$f(\beta)<0$

$f(0)=-1\neq0$ より，$f(x)=0$，すなわち，$x^3+x^2-2x-1=0$ は，異なる 3 つの 0 でない実数解をもつ．

別解　$f(-2)=-1<0$，$f(-1)=1>0$，$f(0)=-1<0$，
$f(1)=-1<0$，$f(2)=7>0$

$f(x)$ の増減表から，3 区間 $-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$ において，それぞれ 1 つずつ $f(x)=0$ の実数解が存在する．

(2) $s,\ t,\ u$ は $f(x)=0$ の解であるから　$f(s)=f(t)=f(u)=0$

$$\frac{s^{n-1}f(s)}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}f(t)}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}f(u)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\frac{s^{n-1}(s^3+s^2-2s-1)}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}(t^3+t^2-2t-1)}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}(u^3+u^2-2u-1)}{(u-s)(u-t)}=0$$

$$\begin{aligned}&\frac{s^{n+2}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+2}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+2}}{(u-s)(u-t)}\\&+\frac{s^{n+1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n+1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n+1}}{(u-s)(u-t)}\\&-2\left\{\frac{s^{n}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n}}{(u-s)(u-t)}\right\}\\&-\left\{\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\right\}=0\end{aligned}$$

よって　　$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

(3) a_n の定義式から

$$\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\a_2&=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0,\\a_3&=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}\\&=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}\\&=\frac{(s-t)(t-u)(u-s)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1\end{aligned}$$

上式および (2) の結果より $a_{n+3}=-a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ であるから，すべての自然数 n について，a_n は整数である．

補足 n 次式 $F_n(s,\ t,\ u) = -(t-u)s^{n-1} - (u-s)t^{n-1} - (s-t)u^{n-1}$ は，$s,\ t,\ u$ に関する対称式である．$s=t$ とおくと $F(s,\ t,\ u)=0$ となるから，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $s-t$ を因数にもつ．また，対称性により，$t-u$，$u-s$ も因数にもつ．すなわち，$F_n(s,\ t,\ u)$ は $(s-t)(t-u)(u-s)$ を因数にもつから

$$F_n(s,\ t,\ u) = (s-t)(t-u)(u-s)G_{n-3}(s,\ t,\ u) \quad \cdots(*)$$

とおける．このとき，$G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ は基本対称式 $s+t+u$，$st+tu+us$，stu からなる $n-3$ 次式である．次数 n について次が成立する．

(i) $n=1,\ 2$ のとき，$(*)$ の両辺の次数に着目すると

$$G_{n-3}(s,\ t,\ u) = 0 \quad (n=1,2)$$

(ii) $n=3$ のとき，$G_0(s,\ t,\ u)$ は定数となるので，s^2 の係数を比較して

$$G_0(s,\ t,\ u) = 1$$

(iii) $n=4$ のとき，$G_1(s,\ t,\ u)$ は 1 次式であるから

$$G_1(s,\ t,\ u) = k(s+t+u) \quad (k \text{ は定数})$$

とおいて，s^3 の係数を比較すると，$k=1$ より

$$G_1(s,\ t,\ u) = s+t+u$$

(iv) $n=5$ のとき，$G_2(s,\ t,\ u)$ は 2 次式であるから，定数 $a,\ b$ を用いて

$$G_2(s,\ t,\ u) = a(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)$$

とおいて，s^4 の係数を比較すると，$a=1$ であるから

$$\begin{aligned}&-(t-u)s^4 - (u-s)t^4 - (s-t)u^4\\&\qquad = (s-t)(t-u)(u-s)\{(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)\}\end{aligned}$$

$s=1$，$t=0$，$u=-1$ を上式に代入すると，$b=-1$ より

$$G_2(s,\ t,\ u) = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)$$

$a_n = \dfrac{F_n(s,\ t,\ u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = G_{n-3}(s,\ t,\ u)$ であるから

$$\begin{aligned}&a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1,\\&a_4 = s+t+u, \quad a_5 = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解と係数の関係により　$s+t+u=-1$，$st+tu+us=-2$

ゆえに，$a_4=-1$，$a_5=3$．これらは漸化式から得られる結果と一致する．■

5 (1) A$(0,\ 0,\ 2)$，B$(0,\ 1,\ 3)$，C$(1,\ 0,\ 0)$，D$(1,\ 0,\ 1)$，P$(s,\ t,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s,\ t,\ a-2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(0,\ 0,\ 2)+\frac{t+a-2}{2}(0,\ 1,\ 1)$$

$$=\left(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\right)$$

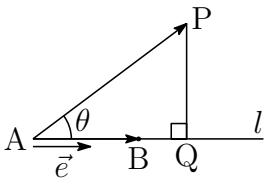
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(s-1,\ t,\ a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=a(0,\ 0,\ 1),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ a)$$

よって　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\boldsymbol{t+a-2}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{t+a+2}}{\mathbf{2}}\right)$，$\mathbf{R(1,\ 0,\ \boldsymbol{a})}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

これに $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(-2s,-t+a-2,\ t-a+2),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-s,-t,\ 0)$$

条件を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$ であるから

$$\frac{1}{4}\{(-2s)^2+(-t+a-2)^2+(t-a+2)^2\}=(1-s)^2+(-t)^2$$

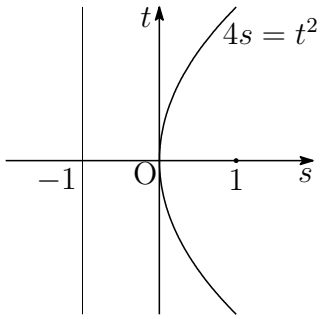
$$2s^2+(t-a+2)^2=2\{(1-s)^2+t^2\}$$

整理すると　$\boldsymbol{4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2}$

(3) (2) の結果から

$$4\left(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\right)=(t+a-2)^2 \quad \cdots(*)$$

st 平面上の放物線 $4s=t^2$ は，焦点 $(1,\ 0)$，準線 $s=-1$ である．



放物線 $(*)$ は放物線 $4s=t^2$ を s 軸方向に $-\dfrac{a^2-4a+3}{2}$，t 軸方向に $-a+2$ だけ平行移動したものである．$(*)$ の焦点は

$$\left(1-\frac{a^2-4a+3}{2},-a+2\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{-a^2+4a-1}{2},-a+2\right)}$$

また，$(*)$ の準線の方程式は

$$s=-1-\frac{a^2-4a+3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{s=\frac{-a^2+4a-5}{2}}$$

■