

平成28年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分  
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

- 1 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円 $C$ 上に点 $z$ がある.  $a$ を実数の定数とし,

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく.

- (1)  $|w|^2$ を $z$ の実部 $x$ と $a$ を用いて表せ.
- (2) 点 $z$ が $C$ 上を一周するとき,  $|w|$ の最小値を $a$ を用いて表せ.

- 2  $a > 0$ に対し, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$$

をみたすとする.

- (1)  $f(x)$ を求めよ.
- (2)  $0 < a \leq 2\pi$ において,

$$g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$$

の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ.

- 3 机のひきだしAに3枚のメダル, ひきだしBに2枚のメダルが入っている. ひきだしAの各メダルの色は金, 銀, 銅のどれかであり, ひきだしBの各メダルの色は金, 銀のどちらかである.

- (1) ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ.
- (2) ひきだしA, Bをあわせたメダルの色が2種類である確率を求めよ.
- (3) ひきだしA, Bをあわせてちょうど3枚の金メダルが入っていることがわかっているとき, ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ.

- 4 (1) 次の方程式が異なる3つの0でない実数解をもつことを示せ.

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

- (2) 方程式①の3つの実数解を  $s, t, u$  とし, 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき,

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) (2) の  $a_n$  がすべて整数であることを示せ.

- 5 空間の2点  $A(0, 0, 2)$ ,  $B(0, 1, 3)$  を通る直線を  $l$  とし, 2点  $C(1, 0, 0)$ ,  $D(1, 0, 1)$  を通る直線を  $m$  とする.  $a$  を定数として,  $l$  上にも  $m$  上にもない点  $P(s, t, a)$  を考える.

- (1)  $P$  から  $l$  に下ろした垂線と  $l$  の交点を  $Q$  とし,  $P$  から  $m$  に下ろした垂線と  $m$  の交点を  $R$  とする.  $Q, R$  の座標をそれぞれ  $s, t, a$  を用いて表せ.
- (2)  $P$  を中心とし,  $l$  と  $m$  がともに接するような球面が存在するための条件を  $s, t, a$  の関係式で表せ.
- (3)  $s, t$  と定数  $a$  が (2) の条件をみたすとき, 平面上の点  $(s, t)$  の軌跡が放物線であることを示し, その焦点と準線を  $a$  を用いて表せ.

## 解答例

1 (1)  $w = z^2 - 2az + 1$  ( $a$  は実数,  $|z| = 2$ ) より

$$\begin{aligned} |w|^2 &= w\bar{w} = (z^2 - 2az + 1)(\bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1) \\ &= \{(z^2 - 2az) + 1\}\{(\bar{z}^2 - 2a\bar{z}) + 1\} \\ &= (z^2 - 2az)(\bar{z}^2 - 2a\bar{z}) + (z^2 - 2az) + (\bar{z}^2 - 2a\bar{z}) + 1 \\ &= z\bar{z}(z - 2a)(\bar{z} - 2a) + z^2 + \bar{z}^2 - 2a(z + \bar{z}) + 1 \\ &= z\bar{z}\{z\bar{z} - 2a(z + \bar{z}) + 4a^2\} + (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} - 2a(z + \bar{z}) + 1 \end{aligned}$$

$z\bar{z} = |z|^2 = 4$ ,  $z + \bar{z} = 2x$  であるから

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 4\{4 - 2a \cdot 2x + 4a^2\} + (2x)^2 - 2 \cdot 4 - 2a \cdot 2x + 1 \\ &= 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から,  $f(x) = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$  とおくと

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 + 9 - 9a^2$$

$-2 \leq x \leq 2$  における  $f(x)$  の最小値を  $m$  とする.

(i)  $\frac{5a}{2} \leq -2$ , すなわち,  $a \leq -\frac{4}{5}$  のとき

$$m = f(-2) = 16a^2 + 40a + 25 = (4a + 5)^2$$

(ii)  $-2 \leq \frac{5a}{2} \leq 2$ , すなわち,  $-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5}$  のとき

$$m = f\left(\frac{5a}{2}\right) = 9 - 9a^2$$

(iii)  $2 \leq \frac{5a}{2}$ , すなわち,  $\frac{4}{5} \leq a$  のとき

$$m = f(2) = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2$$

(i)~(iii) より,  $|w|$  の最小値は

$$\begin{cases} a \leq -\frac{4}{5} & \text{のとき} & |4a + 5| \\ -\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5} & \text{のとき} & 3\sqrt{1 - a^2} \\ \frac{4}{5} \leq a & \text{のとき} & |4a - 5| \end{cases}$$

2 (1) 与えられた関数  $f(x)$  から ( $a > 0$ )

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{2a} \int_{-a}^a dt + \int_{-a}^a f(t) \sin t dt = e^{-x} + \int_{-a}^a f(t) \sin t dt \end{aligned}$$

$$k = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt \text{ とおくと, } f(x) = e^{-x} + k \text{ より}$$

$$\begin{aligned} k &= \int_{-a}^a (e^{-t} + k) \sin t dt = \int_{-a}^a e^{-t} \sin t dt + k \int_{-a}^a \sin t dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[ e^{-t} (\sin t + \cos t) \right]_{-a}^a + k \left[ -\cos t \right]_{-a}^a \\ &= -\frac{1}{2} (e^a + e^{-a}) \sin a + \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) \cos a \end{aligned}$$

$$\text{よって } f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} (e^a + e^{-a}) \sin a + \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) \cos a$$

(2)  $k = g(a)$  であるから

$$g(a) = -\frac{1}{2} (e^a + e^{-a}) \sin a + \frac{1}{2} (e^a - e^{-a}) \cos a$$

$$g'(a) = -(e^a - e^{-a}) \sin a$$

したがって、 $0 \leq a \leq 2\pi$  における  $g(a)$  の増減は、次のようになる。

$a$	0	...	$\pi$	...	$2\pi$
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\text{よって, 求める最小値は } g(\pi) = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}$$

- 3** (1) ひきだし A のメダルの色が 1 種類または 3 種類である確率は

$$\frac{3}{3^3} + \frac{3!}{3^3} = \frac{1}{3}$$

求める確率は、この余事象の確率であるから  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(2) 2 種類のメダルの色が金, 銀である確率は  $\frac{2^5 - 2}{3^3 \cdot 2^2} = \frac{30}{108}$

2 種類のメダルの色が金, 銅である確率は  $\frac{(2^3 - 1) \times 1}{3^3 \cdot 2^2} = \frac{7}{108}$

2 種類のメダルの色が銀, 銅である確率は  $\frac{(2^3 - 1) \times 1}{3^3 \cdot 2^2} = \frac{7}{108}$

よって、求める確率は  $\frac{30}{108} + \frac{7}{108} + \frac{7}{108} = \frac{11}{27}$

(3) (i) A に 3 枚の金メダルが入る場合は  $1 \times 1 = 1$  (通り)

(ii) A に 2 枚の金メダルが入る場合は  ${}_3C_2 \cdot 2 \times {}_2C_1 \cdot 1 = 12$  (通り)

(iii) A に 1 枚の金メダルが入る場合は  ${}_3C_1 \cdot 2^2 \times {}_2C_2 = 12$  (通り)

ひきだし A のメダルの色が 2 種類であるのは、(ii) の場合と、(iii) において 1 枚の金メダル以外の残りの 2 枚のメダルが同色である場合であるから、その総数は

$$12 + {}_3C_1 \cdot 2 \times {}_2C_2 = 18 \text{ (通り)}$$

よって、求める条件付き確率は  $\frac{18}{1 + 12 + 12} = \frac{18}{25}$

- 4 (1)  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$  とおくと  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$   
2次方程式  $f'(x) = 0$  の係数について

$$D/4 = (-1)^2 - 3 \cdot (-2) = 7 > 0$$

したがって、 $f'(x) = 0$  は異なる2つの実数解をもち、それらを  $\alpha, \beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ )、 $f(x)$  は極大値  $f(\alpha)$ 、極小値  $f(\beta)$  をもつ。

$x$	...	$\alpha$	...	$\beta$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(x) = x^3 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \text{ より } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

また、 $f'(x) = 0$  の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = f'(x) \left( \frac{x}{3} + \frac{1}{9} \right) - \frac{7}{9}(2x+1) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \frac{49}{81}(2\alpha+1)(2\beta+1) = \frac{49}{81}\{4\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 1\} \\ &= \frac{49}{81} \left\{ 4 \left( -\frac{2}{3} \right) + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right\} = -\frac{49}{243} < 0 \end{aligned}$$

上の結果と増減表により  $f(\alpha) > 0$ 、 $f(\beta) < 0$

$f(0) = -1 \neq 0$  より、 $f(x) = 0$ 、すなわち、 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$  は、異なる3つの0でない実数解をもつ。

別解  $f(-2) = -1 < 0$ 、 $f(-1) = 1 > 0$ 、 $f(0) = -1 < 0$ 、  
 $f(1) = -1 < 0$ 、 $f(2) = 7 > 0$

$f(x)$  の増減表から、3区間  $-2 < x < -1$ 、 $-1 < x < 0$ 、 $1 < x < 2$  において、それぞれ1つずつ  $f(x) = 0$  の実数解が存在する。

(2)  $s, t, u$  は  $f(x) = 0$  の解であるから  $f(s) = f(t) = f(u) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{s^{n-1}f(s)}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}f(t)}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}f(u)}{(u-s)(u-t)} = 0 \\ & \frac{s^{n-1}(s^3 + s^2 - 2s - 1)}{(s-t)(s-u)} \\ & \quad + \frac{t^{n-1}(t^3 + t^2 - 2t - 1)}{(t-u)(t-s)} \\ & \quad \quad + \frac{u^{n-1}(u^3 + u^2 - 2u - 1)}{(u-s)(u-t)} = 0 \\ & \frac{s^{n+2}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+2}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+2}}{(u-s)(u-t)} \\ & \quad + \frac{s^{n+1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+1}}{(u-s)(u-t)} \\ & \quad - 2 \left\{ \frac{s^n}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^n}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^n}{(u-s)(u-t)} \right\} \\ & \quad - \left\{ \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

よって  $a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$

(3)  $a_n$  の定義式から

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(s-t)(s-u)} + \frac{1}{(t-u)(t-s)} + \frac{1}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-(t-u) - (u-s) - (s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = 0, \\ a_2 &= \frac{s}{(s-t)(s-u)} + \frac{t}{(t-u)(t-s)} + \frac{u}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-s(t-u) - t(u-s) - u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = 0, \\ a_3 &= \frac{s^2}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^2}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^2}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{-s^2(t-u) - t^2(u-s) - u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\ &= \frac{(s-t)(t-u)(u-s)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = 1 \end{aligned}$$

上式および(2)の結果より  $a_{n+3} = -a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$  であるから、すべての自然数  $n$  について、 $a_n$  は整数である。

補足  $n$  次式  $F_n(s, t, u) = -(t-u)s^{n-1} - (u-s)t^{n-1} - (s-t)u^{n-1}$  は,  $s, t, u$  に関する対称式である.  $s = t$  とおくと  $F(s, t, u) = 0$  となるから,  $F_n(s, t, u)$  は  $s - t$  を因数にもつ. また, 対称性により,  $t - u, u - s$  も因数にもつ. すなわち,  $F_n(s, t, u)$  は  $(s-t)(t-u)(u-s)$  を因数にもつから

$$F_n(s, t, u) = (s-t)(t-u)(u-s)G_{n-3}(s, t, u) \quad \cdots (*)$$

とおける. このとき,  $G_{n-3}(s, t, u)$  は基本対称式  $s+t+u, st+tu+us, stu$  からなる  $n-3$  次式である. 次数  $n$  について次が成立する.

(i)  $n = 1, 2$  のとき,  $(*)$  の両辺の次数に着目すると

$$G_{n-3}(s, t, u) = 0 \quad (n = 1, 2)$$

(ii)  $n = 3$  のとき,  $G_0(s, t, u)$  は定数となるので,  $s^2$  の係数を比較して

$$G_0(s, t, u) = 1$$

(iii)  $n = 4$  のとき,  $G_1(s, t, u)$  は 1 次式であるから

$$G_1(s, t, u) = k(s+t+u) \quad (k \text{ は定数})$$

とおいて,  $s^3$  の係数を比較すると,  $k = 1$  より

$$G_1(s, t, u) = s+t+u$$

(iv)  $n = 5$  のとき,  $G_2(s, t, u)$  は 2 次式であるから, 定数  $a, b$  を用いて

$$G_2(s, t, u) = a(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)$$

とおいて,  $s^4$  の係数を比較すると,  $a = 1$  であるから

$$\begin{aligned} & -(t-u)s^4 - (u-s)t^4 - (s-t)u^4 \\ &= (s-t)(t-u)(u-s)\{(s+t+u)^2 + b(st+tu+us)\} \end{aligned}$$

$s = 1, t = 0, u = -1$  を上式に代入すると,  $b = -1$  より

$$G_2(s, t, u) = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)$$

$$a_n = \frac{F_n(s, t, u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} = G_{n-3}(s, t, u) \text{ であるから}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1,$$

$$a_4 = s+t+u, \quad a_5 = (s+t+u)^2 - (st+tu+us)$$

$f(x) = 0$  の解と係数の関係により  $s+t+u = -1, st+tu+us = -2$  ゆえに,  $a_4 = -1, a_5 = 3$ . これらは漸化式から得られる結果と一致する.



5 (1)  $A(0, 0, 2)$ ,  $B(0, 1, 3)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $D(1, 0, 1)$ ,  $P(s, t, a)$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{AP} = (s, t, a-2) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{t+a-2}{2} (0, 1, 1),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = (0, 0, 2) + \frac{t+a-2}{2} (0, 1, 1) \\ &= \left( 0, \frac{t+a-2}{2}, \frac{t+a+2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CD} = (0, 0, 1), \quad \overrightarrow{CP} = (s-1, t, a) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{CR} = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD} = a(0, 0, 1),$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR} = (1, 0, 0) + a(0, 0, 1) = (1, 0, a)$$

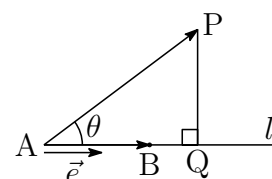
$$\text{よって } Q\left(0, \frac{t+a-2}{2}, \frac{t+a+2}{2}\right), \quad R(1, 0, a)$$

補足  $\overrightarrow{AB}$  と同じ方向の単位ベクトルを  $\vec{e}$  とし,  $\overrightarrow{AP}$  と  $\vec{e}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{e} = |\overrightarrow{AP}| |\vec{e}| \cos \theta = |\overrightarrow{AP}| \cos \theta$$

$$\overrightarrow{AQ} = (|\overrightarrow{AP}| \cos \theta) \vec{e} \text{ であるから } \overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

$$\text{これに } \vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \text{ を代入すると } \overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(-2s, -t+a-2, t-a+2), \quad \overrightarrow{PR} = (1-s, -t, 0)$$

条件を満たすとき,  $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PR}|^2$  であるから

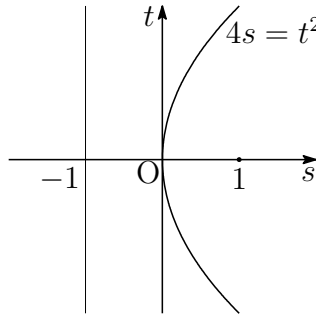
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\{(-2s)^2 + (-t+a-2)^2 + (t-a+2)^2\} &= (1-s)^2 + (-t)^2 \\ 2s^2 + (t-a+2)^2 &= 2\{(1-s)^2 + t^2\} \end{aligned}$$

$$\text{整理すると } 4s = t^2 + 2(a-2)t - a^2 + 4a - 2$$

(3) (2) の結果から

$$4 \left( s + \frac{a^2 - 4a + 3}{2} \right) = (t + a - 2)^2 \quad \dots (*)$$

$st$  平面上の放物線  $4s = t^2$  は、焦点  $(1, 0)$ 、準線  $s = -1$  である。



放物線 (\*) は放物線  $4s = t^2$  を  $s$  軸方向に  $-\frac{a^2 - 4a + 3}{2}$ 、 $t$  軸方向に  $-a + 2$  だけ平行移動したものである。(\*) の焦点は

$$\left( 1 - \frac{a^2 - 4a + 3}{2}, -a + 2 \right) \quad \text{すなわち} \quad \left( \frac{-a^2 + 4a - 1}{2}, -a + 2 \right)$$

また、(\*) の準線の方程式は

$$s = -1 - \frac{a^2 - 4a + 3}{2} \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{-a^2 + 4a - 5}{2}$$