平成 27 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x, \quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1) a を t で表せ．

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $p,\ q$ は正の実数とし，$a_1 = 0$，$a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を $p,\ q,\ n$ で表せ．

(2) $q = 1$ とする．すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 1)，B(−1, 1, 1) の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) C の座標を求めよ．

(2) $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$ をみたす実数 s，t を求めよ．

(3) α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{a} + l\vec{c}$ をみたす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ n は自然数，a は $a > \dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n = 1$ のときは $\sin^{n-1}\theta = 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\, d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\, d\theta$ を示せ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = (x-1)e^x$ より　$y' = xe^x$

C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線を l_1 とすると，その方程式は

$$y-(t-1)e^t = te^t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = te^t x + (-t^2+t-1)e^t$$

$C_2 : y = \dfrac{1}{2e}x^2 + a$ より　$y' = \dfrac{x}{e}$

C_2 上の点 $\left(s,\ \dfrac{1}{2e}s^2 + a\right)$ における接線を l_2 とすると，その方程式は

$$y - \left(\frac{1}{2e}s^2 + a\right) = \frac{s}{e}(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{s}{e}x - \frac{s^2}{2e} + a$$

l_1 と l_2 の方程式は一致するから

$$te^t = \frac{s}{e}, \quad (-t^2+t-1)e^t = -\frac{s^2}{2e} + a$$

第 1 式から，$s = te^{t+1}$．これを第 2 式に代入すると

$$(-t^2+t-1)e^t = -\frac{(te^{t+1})^2}{2e} + a$$

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1} + (-t^2+t-1)e^t}$

(2) $f(t) = a$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2+t)e^{2t+1} - (t^2+t)e^t \\ &= t(t+1)e^t(e^{t+1}-1) \end{aligned}$$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

よって，a は，$\boldsymbol{t = 0}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる．

2 (1) $a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ より $(q\neq 0)$ $\qquad \dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ より $(a_1=0)$ $\qquad b_1=\dfrac{a_1}{p}=0,\quad b_{n+1}=b_n+\left(-\dfrac{q}{p}\right)^n$

$n\geqq 2$ のとき，$p,\ q>0$ より，$-\dfrac{q}{p}\neq 1$ に注意して

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$$

$$b_n-b_1=\frac{(-\frac{q}{p})^2\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{q}{p}\right)}$$

$$b_n=\frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{b_n=\frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}$$

(2) $a_n=p^nb_n$ であるから，(1) の結果から

$$a_n=p^nb_n=p^n\cdot\frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}=\frac{q^2}{p+q}\left\{p^{n-1}-(-q)^{n-1}\right\}$$

これに $q=1$ を代入して $\quad a_n=\dfrac{1}{p+1}\left\{p^{n-1}-(-1)^{n-1}\right\}$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{p+1}\left\{p^n-(-1)^n\right\}-\frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1}-(-1)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{p+1}\left\{p^{n-1}(p-1)-2(-1)^n\right\}\end{aligned}$$

すべての自然数 n について，$a_{n+1}\geqq a_n$ が成立する条件は $(p+1>0)$

$p^{n-1}(p-1)-2(-1)^n\geqq 0$ ゆえに $p^{n-1}(p-1)\geqq 2(-1)^n \quad \cdots(*)$

$n=1$ のとき $\quad p-1\geqq -2$ より，$(*)$ は成立する．

$n=2$ のとき $\quad (*)$ は $\quad p(p-1)\geqq 2$ ゆえに $\quad (p+1)(p-2)\geqq 0$

$p>0$ に注意してこれを解くと $\quad p\geqq 2$

逆に，$p\geqq 2$ であるとき，$n\geqq 2$ について

$$p^{n-1}(p-1)\geqq 2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}\geqq 2\geqq 2(-1)^n$$

よって，求める p の値の範囲は $\quad p\geqq 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|^2=3$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}$ は α に平行なベクトルで $\vec{a}$ に垂直である．

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)-3(-1,\ 1,\ 1)=2(2,-1,-1)$$

$\vec{d}=(2,-1,-1)$ とすると，$\vec{c}$ は $\vec{d}$ と平行な単位ベクトルであるから，x 成分の符号に注意して

$$\vec{c}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)$$

(2) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は α に平行で，$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから，$\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$ より [1]

$$s=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}},\qquad t=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=-\frac{4}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}$$

(2) と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より

$$k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\boldsymbol{\frac{x+y+z}{3}}$$
$$l=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\boldsymbol{\frac{2x-y-z}{\sqrt{6}}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ の補足を参照．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $X_1 = 3$ となる事象を A とすると，A は赤玉 2 個，白玉 2 個の 4 個から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す事象であるから，求める確率は

$$P(A) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{2 \cdot 2}{6} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(2) $X_2 = 3$ となる事象を B とする．

(i) 事象 A が起きたとき，袋の中は赤玉 3 個と白玉 2 個となる．$X_2 = 3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出さない場合であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3 \cdot 2}{10}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(ii) 事象 $\overline{A}$ が起きたとき，袋の中は赤玉 2 個と白玉 3 個となる．$X_2 = 3$ となるのは，2 回目の試行で色違いの玉を取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(\overline{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

(3) 求める条件付き確率は，(2) の結果から

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{15} \div \frac{7}{15} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

$\boxed{\textbf{5}}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta$ とおくと [2]

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta(\cos\theta)'\,d\theta \\
&= -\Big[\ \sin^n\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^{n-1}\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= n(I_{n-1} - I_{n+1})
\end{aligned}$$

ゆえに　$I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta$

(2) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$ より

$$f(x) = x\int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta - \int_0^x \theta(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta$$

これを微分して $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，(1) の結果より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta + x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x) \\
&\qquad\qquad - x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x \\
&= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = aI_{n+1} - I_{n-1} = a\cdot\frac{n}{n+1}I_{n-1} - I_{n-1} = \frac{(a-1)n-1}{n+1}I_{n-1}$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ より　$(a-1)n-1 = 0$　ゆえに　$a = 1 + \dfrac{1}{n}$　$\cdots$①

$a > \dfrac{3}{2}$ であるから　$1 + \dfrac{1}{n} > \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$

n は自然数であるから　$\boldsymbol{n = 1}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{a = 2}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018_kouki.pdf $\boxed{1}$ を参照.

(3) (2) の結果により

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(2\sin^2\theta - 1)d\theta \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\
&= \left[-\frac{\pi}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

別解 $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと $\dfrac{d\theta}{d\varphi} = -1$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
φ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos 2\theta\, d\theta \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \varphi\cos(\pi - 2\varphi)\cdot(-d\varphi) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos 2\varphi\, d\varphi \\
&= \left[\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$