

平成27年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分  
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

問題 1 2 3 4 5

1  $a$  は実数とし, 2つの曲線

$$C_1: y = (x-1)e^x, \quad C_2: y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある. ただし,  $e$  は自然対数の底である.  $C_1$  上の点  $(t, (t-1)e^t)$  における  $C_1$  の接線が  $C_2$  に接するとする.

- (1)  $a$  を  $t$  で表せ.
- (2)  $t$  が実数全体を動くとき,  $a$  の極小値, およびそのときの  $t$  の値を求めよ.

2  $p, q$  は正の実数とし,  $a_1 = 0, a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定まる数列  $\{a_n\}$  がある.

- (1)  $b_n = \frac{a_n}{p^n}$  とする. 数列  $\{b_n\}$  の一般項を  $p, q, n$  で表せ.
- (2)  $q = 1$  とする. すべての自然数  $n$  について  $a_{n+1} \geq a_n$  となるような  $p$  の値の範囲を求めよ.

3 空間の3点  $O(0, 0, 0), A(1, 1, 1), B(-1, 1, 1)$  の定める平面を  $\alpha$  とし,  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$  とおく.  $\alpha$  上の点  $C$  があり, その  $x$  座標が正であるとする. ベクトル  $\vec{OC}$  が  $\vec{a}$  に垂直で, 大きさが1であるとする.  $\vec{OC} = \vec{c}$  とおく.

- (1)  $C$  の座標を求めよ.
- (2)  $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$  をみたす実数  $s, t$  を求めよ.
- (3)  $\alpha$  上にない点  $P(x, y, z)$  から  $\alpha$  に垂線を下ろし,  $\alpha$  との交点を  $H$  とする.  $\vec{OH} = k\vec{a} + l\vec{c}$  をみたす実数  $k, l$  を  $x, y, z$  で表せ.

4 初めに赤玉2個と白玉2個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

- (i) まず同時に2個の玉を取り出す。
- (ii) その2個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉2個を袋に入れる。
- (iii) 最後に白玉1個を袋に追加してかき混ぜ、1回の試行を終える。 $n$ 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を $X_n$ とする。

- (1)  $X_1 = 3$ となる確率を求めよ。
- (2)  $X_2 = 3$ となる確率を求めよ。
- (3)  $X_2 = 3$ であったとき、 $X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。

5  $n$ は自然数、 $a$ は $a > \frac{3}{2}$ をみたす実数とし、実数 $x$ の関数

$$f(x) = \int_0^x (x - \theta)(a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$$

を考える。ただし、 $n = 1$ のときは $\sin^{n-1} \theta = 1$ とする。

- (1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta$ を示せ。
- (2)  $f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$ をみたす $n$ と $a$ の値を求めよ。
- (3) (2)で求めた $n$ と $a$ に対して、 $f \left( \frac{\pi}{2} \right)$ を求めよ。

## 解答例

1 (1)  $C_1: y = (x-1)e^x$  より  $y' = xe^x$

$C_1$  上の点  $(t, (t-1)e^t)$  における接線を  $l_1$  とすると, その方程式は

$$y - (t-1)e^t = te^t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = te^t x + (-t^2 + t - 1)e^t$$

$C_2: y = \frac{1}{2e}x^2 + a$  より  $y' = \frac{x}{e}$

$C_2$  上の点  $(s, \frac{1}{2e}s^2 + a)$  における接線を  $l_2$  とすると, その方程式は

$$y - \left(\frac{1}{2e}s^2 + a\right) = \frac{s}{e}(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{s}{e}x - \frac{s^2}{2e} + a$$

$l_1$  と  $l_2$  の方程式は一致するから

$$te^t = \frac{s}{e}, \quad (-t^2 + t - 1)e^t = -\frac{s^2}{2e} + a$$

第1式から,  $s = te^{t+1}$ . これを第2式に代入すると

$$(-t^2 + t - 1)e^t = -\frac{(te^{t+1})^2}{2e} + a$$

よって  $a = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} + (-t^2 + t - 1)e^t$

(2)  $f(t) = a$  とおくと  $f'(t) = (t^2 + t)e^{2t+1} - (t^2 + t)e^t$   
 $= t(t+1)e^t(e^{t+1} - 1)$

$f(t)$  の増減表は, 次のようになる.

$t$	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘	極小 -1	↗

よって,  $a$  は,  $t = 0$  のとき, 極小値  $-1$  をとる. ■

**2** (1)  $a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$  より ( $p \neq 0$ )  $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$

$$b_n = \frac{a_n}{p^n} \text{ より } (a_1 = 0) \quad b_1 = \frac{a_1}{p} = 0, \quad b_{n+1} = b_n + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$n \geq 2$  のとき,  $p, q > 0$  より,  $-\frac{q}{p} \neq 1$  に注意して

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$$

$$b_n - b_1 = \frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^2 \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)}$$

$$b_n = \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は,  $n = 1$  のときも成立するから

$$b_n = \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

(2)  $a_n = p^n b_n$  であるから, (1) の結果から

$$a_n = p^n b_n = p^n \cdot \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\} = \frac{q^2}{p+q} \{p^{n-1} - (-q)^{n-1}\}$$

これに  $q = 1$  を代入して  $a_n = \frac{1}{p+1} \{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{p+1} \{p^n - (-1)^n\} - \frac{1}{p+1} \{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{p+1} \{p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n\}$$

すべての自然数  $n$  について,  $a_{n+1} \geq a_n$  が成立する条件は ( $p+1 > 0$ )

$$p^{n-1}(p-1) - 2(-1)^n \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad p^{n-1}(p-1) \geq 2(-1)^n \quad \dots (*)$$

$n = 1$  のとき  $p-1 \geq -2$  より, (\*) は成立する.

$n = 2$  のとき (\*) は  $p(p-1) \geq 2$  ゆえに  $(p+1)(p-2) \geq 0$

$$p > 0 \text{ に注意してこれを解くと } p \geq 2$$

逆に,  $p \geq 2$  であるとき,  $n \geq 2$  について

$$p^{n-1}(p-1) \geq 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} \geq 2 \geq 2(-1)^n$$

よって, 求める  $p$  の値の範囲は  $p \geq 2$  ■

**3** (1)  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 1)$  より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ,  $|\vec{a}|^2 = 3$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b}$  は  $\alpha$  に平行なベクトルで  $\vec{a}$  に垂直である.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b} = (1, 1, 1) - 3(-1, 1, 1) = 2(2, -1, -1)$$

$\vec{d} = (2, -1, -1)$  とすると,  $\vec{c}$  は  $\vec{d}$  と平行な単位ベクトルであるから,  $x$  成分の符号に注意して

$$\vec{c} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{C} \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

(2)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  は  $\alpha$  に平行で,  $\vec{a} \perp \vec{c}$  であるから,  $\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c}$  より<sup>1</sup>

$$s = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(3)  $\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{HP}$  について,  $\vec{HP} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{HP} \perp \vec{c}$  であるから

$$\vec{OP} \cdot \vec{a} = \vec{OH} \cdot \vec{a}, \quad \vec{OP} \cdot \vec{c} = \vec{OH} \cdot \vec{c}$$

(2) と同様に,  $\vec{OH} = \frac{\vec{OH} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{OH} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c}$ ,  $\vec{OP} = (x, y, z)$  より

$$k = \frac{\vec{OH} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{x + y + z}{3}$$

$$l = \frac{\vec{OH} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} = \frac{2x - y - z}{\sqrt{6}}$$

■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai\\_ri\\_2016.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf) [5] の補足を参照.

- 4 (1)  $X_1 = 3$ となる事象を  $A$  とすると,  $A$  は赤玉 2 個, 白玉 2 個の 4 個から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す事象であるから, 求める確率は

$$P(A) = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2 \cdot 2}{6} = \frac{2}{3}$$

- (2)  $X_2 = 3$ となる事象を  $B$  とする.

- (i) 事象  $A$  が起きたとき, 袋の中は赤玉 3 個と白玉 2 個となる.  $X_2 = 3$ となるのは, 2 回目の試行で色違いの玉を取り出さない場合であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3 \cdot 2}{10}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

- (ii) 事象  $\bar{A}$  が起きたとき, 袋の中は赤玉 2 個と白玉 3 個となる.  $X_2 = 3$ となるのは, 2 回目の試行で色違いの玉を取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

- (i), (ii) より, 求める確率は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

- (3) 求める条件付き確率は, (2) の結果から

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{15} \div \frac{7}{15} = \frac{4}{7}$$



5 (1)  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$  とおくと<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta (\cos \theta)' d\theta \\ &= - \left[ \sin^n \theta \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^{n-1} \theta \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= n(I_{n-1} - I_{n+1}) \end{aligned}$$

ゆえに  $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

よって  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta$

(2)  $f(x) = \int_0^x (x - \theta)(a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$  より

$$f(x) = x \int_0^x (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta - \int_0^x \theta (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$$

これを微分して  $x = \frac{\pi}{2}$  を代入すると, (1) の結果より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta + x(a \sin^{n+1} x - \sin^{n-1} x) \\ &\quad - x(a \sin^{n+1} x - \sin^{n-1} x) \\ &= \int_0^x (a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = a I_{n+1} - I_{n-1} = a \cdot \frac{n}{n+1} I_{n-1} - I_{n-1} = \frac{(a-1)n-1}{n+1} I_{n-1}$$

$$f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 \text{ より } (a-1)n-1=0 \text{ ゆえに } a = 1 + \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a > \frac{3}{2} \text{ であるから } 1 + \frac{1}{n} > \frac{3}{2} \text{ ゆえに } \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

$n$  は自然数であるから  $n = 1$  これを  $\textcircled{1}$  に代入して  $a = 2$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech\\_2018.kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2018.kouki.pdf)  $\textcircled{1}$  を参照.

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (2\sin^2 \theta - 1) d\theta \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos 2\theta d\theta \\
 &= \left[ -\frac{\pi}{4} \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

別解  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$  とおくと  $\frac{d\theta}{d\varphi} = -1$ 

$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$\varphi$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos 2\theta d\theta \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \varphi \cos(\pi - 2\varphi) \cdot (-d\varphi) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos 2\varphi d\varphi \\
 &= \left[ \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

