

平成26年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

問題 1 2 3 4 5

1 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ とする.

- (1) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値, およびそのときの x を求めよ.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ に2点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ ($a < b$) で接する直線の方程式を求めよ.

2 四面体 $OABC$ は, $OA = OB = OC = 1$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ をみたす. 辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $OP = p$, $OQ = q$, $pq = \frac{1}{2}$ となるようにとる. $p + q = t$ とし, $\triangle CPQ$ の面積を S とする.

- (1) t のとる得る値の範囲を求めよ.
- (2) S を t で表せ.
- (3) S の最小値, およびそのときの p , q を求めよ.

3 逆行列をもつ2次の正方行列, A_1, A_2, A_3, \dots が, 関係式 $A_{n+1}A_n = A_n + 2E$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたすとする. さらに $A_1 + E$ は逆行列をもつとする. ここで E は2次の単位行列とする.

- (1) すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもち,

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$$

が成立することを示せ.

- (2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ により, 行列 B_n を定める. B_{n+1} と B_n の間に成立する関係式を求め, B_n を B_1 と n を用いて表せ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ より

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x+1)(x-4)$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は

x	...	-1	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘ 極小 -3		↗ 極大 0		↘ 極小 -128	

$x = -1$ で極小値 -3 、 $x = 0$ で極大値 0 、 $x = 4$ で極小値 -128 をとる。

- (2) 曲線 $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ と 2 点 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ で接する直線の方程式を $y = px + q$ とする。2 式から y を消去した x の 4 次方程式は $x = a$ および $x = b$ をそれぞれ 2 重解をもつので、 x^4 の係数に注意して

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 - (px + q) = (x - a)^2(x - b)^2$$

右辺を展開し、 x について整理すると

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 - 8x^2 - px - q &= (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2bx + b^2) \\ &= x^4 - 2(a+b)x^3 + \{(a+b)^2 + 2ab\}x^2 - 2ab(a+b)x + (ab)^2 \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$(*) \begin{cases} -2(a+b) = -4 \\ (a+b)^2 + 2ab = -8 \\ -2ab(a+b) = -p \\ (ab)^2 = -q \end{cases}$$

(*) の第 1, 第 2 式を解いて $a + b = 2$, $ab = -6$

これらを (*) の第 3, 第 4 式に代入すると

$$p = -24, q = -36 \quad \dots (**)$$

このとき、 a, b を解とする 2 次方程式は $t^2 - 2t - 6 = 0$

$a < b$ に注意して $a = 1 - \sqrt{7}$, $b = 1 + \sqrt{7}$

したがって、求める直線は、唯一存在し、(**) より

$$y = -24x - 36$$



- 2 (1) 四面体の頂点を空間に $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, 辺 OA , OB 上にそれぞれ

$$P(p, 0, 0), Q(0, q, 0) \quad (0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1)$$

をとる. $pq = \frac{1}{2}$ より, $q = \frac{1}{2p}$. また, $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$ であるから

$$0 < p \leq 1, 0 < \frac{1}{2p} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \leq p \leq 1$$

$t = p + q = p + \frac{1}{2p}$ ($\frac{1}{2} \leq p \leq 1$) であるから

$$\frac{dt}{dp} = 1 - \frac{1}{2p^2} = \frac{1}{p^2} \left(p^2 - \frac{1}{2} \right)$$

p	$\frac{1}{2}$	\cdots	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	\cdots	1
$\frac{dt}{dp}$		-	0	+	
t	$\frac{3}{2}$	\searrow	$\sqrt{2}$	\nearrow	$\frac{3}{2}$

よって $\sqrt{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$

- (2) $\vec{CP} = (p, 0, -1)$, $\vec{CQ} = (0, q, -1)$ であるから

$$|\vec{CP}|^2 = p^2 + 1, \quad |\vec{CQ}|^2 = q^2 + 1, \quad \vec{CP} \cdot \vec{CQ} = 1$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CP}|^2 |\vec{CQ}|^2 - (\vec{CP} \cdot \vec{CQ})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(1+p^2)(1+q^2) - 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2 + p^2 q^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(p+q)^2 - 2pq + (pq)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

- (3) (1), (2) の結果から, S は $t = \sqrt{2}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ をとる.

このとき, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ これを $q = \frac{1}{2p}$ に代入して $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ■

3 (1) $A_{n+1}A_n = A_n + 2E \cdots (*)$ より

$$A_{n+1}A_n + A_n = 2A_n + 2E \quad \text{ゆえに} \quad (A_{n+1} + E)A_n = 2(A_n + E)$$

$A_n + E$ および $A_{n+1} + E$ は逆行列をもつから, 上の第2式から

$$\begin{aligned} A_n &= 2(A_{n+1} + E)^{-1}(A_n + E) \\ A_n(A_n + E)^{-1} &= 2(A_{n+1} + E)^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$$

(2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ および (*) と (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (2E - A_{n+1})(A_{n+1} + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2E - A_{n+1})A_n(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2A_n - A_{n+1}A_n)(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\{2A_n - (A_n + 2E)\}(A_n + E)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(2E - A_n)(A_n + E)^{-1} = -\frac{1}{2}B_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} B_1$$

4 (1) 図の S 地点から A_1 地点への経路の総数は

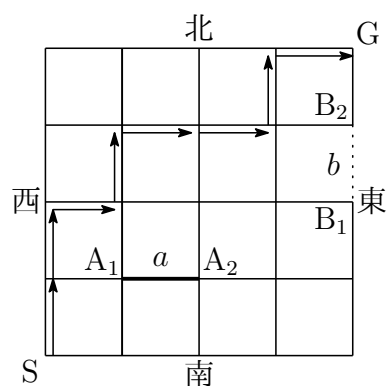
$$\frac{2!}{1!1!} = 2 \quad (\text{通り})$$

図の A_2 地点から G 地点への経路の総数は

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \quad (\text{通り})$$

よって, 求める経路の総数は

$$2 \times 10 = \mathbf{20} \quad (\text{通り})$$



(2) a, b を通り抜ける事象を, それぞれ A, B とする.

b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(B)$ とすると

$$n(B) = \frac{6!}{4!2!} \times 1 = 15 \quad (\text{通り})$$

a と b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow A_1, A_2 \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(A \cap B)$ とすると

$$n(A \cap B) = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

a を通り抜けずに b を通り抜ける経路の総数を $n(\bar{A} \cap B)$ とすると

$$n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9 \quad (\text{通り})$$

(3) a を通り抜ける経路の総数を $n(A)$ とすると, (1) の結果から $n(A) = 20$

a を通り b を通り抜けない経路の総数を $n(A \cap \bar{B})$ とすると

$$n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14 \quad (\text{通り})$$

a または b を通り抜ける経路の総数を $n(A \cup B)$ とすると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29 \quad (\text{通り})$$

すべての経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U) = \frac{8!}{4!4!} = 70 \quad (\text{通り})$$

a も b も通り抜けない経路の総数を $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ とすると

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 29 = 41 \quad (\text{通り})$$

S から G に到達するまでの時間 X とその確率 P は

$$(i) \quad A \cap B \text{ のとき} \quad X = 2 \times 6 + 1 + 8 = 21, \quad P = \frac{6}{70}$$

$$(ii) \quad \bar{A} \cap B \text{ のとき} \quad X = 2 \times 7 + 8 = 22, \quad P = \frac{9}{70}$$

$$(iii) \quad A \cap \bar{B} \text{ のとき} \quad X = 2 \times 7 + 1 = 15, \quad P = \frac{14}{70}$$

$$(iv) \quad \bar{A} \cap \bar{B} \text{ のとき} \quad X = 2 \times 8 = 16, \quad P = \frac{41}{70}$$

よって, 求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 21 \cdot \frac{6}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 15 \cdot \frac{14}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} \\ &= 15 + \frac{6 \cdot 6 + 7 \cdot 9 + 1 \cdot 41}{70} = \mathbf{17} \quad (\text{分}) \end{aligned}$$



5 (1) $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta$ より

$$f'(x) = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \left(x + \frac{\pi}{3} \right)' - |\sin x| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - |\sin x|$$

(2) (1) の結果を利用する.

(i) $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

(ii) $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} \\ &= -\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin(\theta + \pi)| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta = f(0)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{5\pi}{6}$...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 1,$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} |\sin \theta| d\theta = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} \sin \theta d\theta \\ &= \left[-\cos \theta \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} + \left[\cos \theta \right]_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって、 $x = \frac{\pi}{3}$ で最大値 1, $x = \frac{5\pi}{6}$ で最小値 $2 - \sqrt{3}$

別解 (i) $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_x^{x+\frac{\pi}{3}} \\ &= -\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

(ii) $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta = \int_x^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta \\ &= \left[-\cos \theta \right]_x^{\pi} + \left[\cos \theta \right]_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}} = 2 + \sqrt{3} \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

(i), (ii) より

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{2\pi}{3}$...	$\frac{5\pi}{6}$...	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	\nearrow	1	\searrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	$2 - \sqrt{3}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$

よって, $x = \frac{\pi}{3}$ で最大値 1, $x = \frac{5\pi}{6}$ で最小値 $2 - \sqrt{3}$ ■