平成 26 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

$\boxed{1}$ $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの x を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ $(a < b)$ で接する直線の方程式を求めよ．

$\boxed{2}$ 四面体 OABC は，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 90^\circ$ をみたす．辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP} = p$，$\mathrm{OQ} = q$，$pq = \dfrac{1}{2}$ となるようにとる．$p + q = t$ とし，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積を S とする．

(1) t のとる得る値の範囲を求めよ．

(2) S を t で表せ．

(3) S の最小値，およびそのときの p，q を求めよ．

$\boxed{3}$ 逆行列をもつ 2 次の正方行列，A_1，A_2，$A_3, \cdots$ が，関係式 $A_{n+1}A_n = A_n + 2E$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとする．さらに $A_1 + E$ は逆行列をもつとする．ここで E は 2 次の単位行列とする．

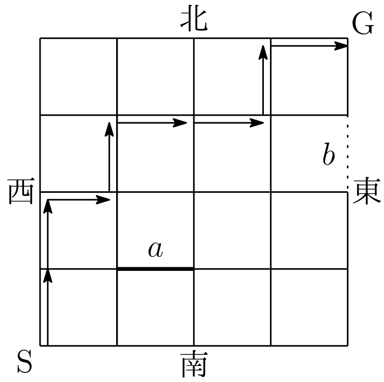
(1) すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもち，

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$$

が成立することを示せ．

(2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ により，行列 B_n を定める．B_{n+1} と B_n との間に成立する関係式を求め，B_n を B_1 と n を用いて表せ．

4 図のような格子状の道路がある．S 地点を出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える．ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるに 2 分かかるものとする．たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる．



(1) a を通り抜ける経路は何通りあるか．

(2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか．

(3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ．

5 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ より

$$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -128	$\nearrow$

$x=-1$ で極小値 -3，$x=0$ で極大値 0，$x=4$ で極小値 -128 をとる．

(2) 曲線 $y=x^4-4x^3-8x^2$ と 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ で接する直線の方程式を $y=px+q$ とする．2 式から y を消去した x の 4 次方程式は $x=a$ および $x=b$ をそれぞれ 2 重解をもつので，x^4 の係数に注意して

$$x^4-4x^3-8x^2-(px+q)=(x-a)^2(x-b)^2$$

右辺を展開し，x について整理すると

$$\begin{aligned}
&x^4-4x^3-8x^2-px-q\\
&\qquad=(x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2)\\
&\qquad=x^4-2(a+b)x^3+\{(a+b)^2+2ab\}x^2-2ab(a+b)x+(ab)^2
\end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$(*)\begin{cases}-2(a+b)=-4\\(a+b)^2+2ab=-8\\-2ab(a+b)=-p\\(ab)^2=-q\end{cases}$$

$(*)$ の第 1，第 2 式を解いて　$a+b=2,\ ab=-6$

これらを $(*)$ の第 3，第 4 式に代入すると

$$p=-24,\ q=-36 \quad \cdots(**)$$

このとき，$a,\ b$ を解とする 2 次方程式は　$t^2-2t-6=0$

$a<b$ に注意して　$a=1-\sqrt{7},\ b=1+\sqrt{7}$

したがって，求める直線は，唯一存在し，$(**)$ より

$$\boldsymbol{y=-24x-36}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 四面体の頂点を空間に O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとり，辺 OA，OB 上にそれぞれ

$$\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ q,\ 0) \quad (0 \leqq p \leqq 1,\ 0 \leqq q \leqq 1)$$

をとる．$pq = \dfrac{1}{2}$ より，$q = \dfrac{1}{2p}$．また，$0 < p \leqq 1,\ 0 < q \leqq 1$ であるから

$$0 < p \leqq 1,\quad 0 < \frac{1}{2p} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \leqq p \leqq 1$$

$t = p + q = p + \dfrac{1}{2p}$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq 1\right)$ であるから

$$\frac{dt}{dp} = 1 - \frac{1}{2p^2} = \frac{1}{p^2}\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$$

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$\frac{dt}{dp}$		$-$	0	$+$	
t	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

よって $\quad \boldsymbol{\sqrt{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (p,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = (0,\ q, -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = p^2 + 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2 = q^2 + 1,\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 1$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+p^2)(1+q^2) - 1^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 + p^2q^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(p+q)^2 - 2pq + (pq)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{t^2 - \frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から，S は $t = \sqrt{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \dfrac{3}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{4}}$ をとる．

このとき，$\boldsymbol{p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ これを $q = \dfrac{1}{2p}$ に代入して $\boldsymbol{q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ ■

3 (1) $A_{n+1}A_n = A_n + 2E \cdots (*)$ より

$$A_{n+1}A_n + A_n = 2A_n + 2E \quad \text{ゆえに} \quad (A_{n+1} + E)A_n = 2(A_n + E)$$

$A_n + E$ および $A_{n+1} + E$ は逆行列をもつから，上の第 2 式から

$$\begin{aligned} A_n &= 2(A_{n+1} + E)^{-1}(A_n + E) \\ A_n(A_n + E)^{-1} &= 2(A_{n+1} + E)^{-1} \end{aligned}$$

よって　$(A_{n+1} + E)^{-1} = \dfrac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$

(2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ および $(*)$ と (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (2E - A_{n+1})(A_{n+1} + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2E - A_{n+1})A_n(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2A_n - A_{n+1}A_n)(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\{2A_n - (A_n + 2E)\}(A_n + E)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(2E - A_n)(A_n + E)^{-1} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}B_n} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{B_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} B_1}$ ■

4 (1) 図の S 地点から $\mathrm{A_1}$ 地点への経路の総数は

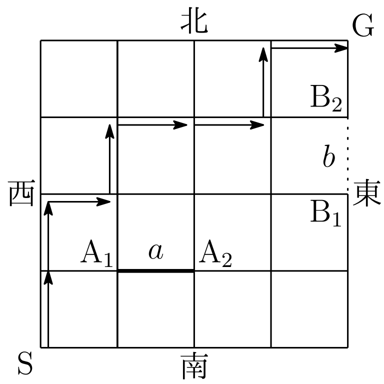
$$\frac{2!}{1!1!} = 2 \ (\text{通り})$$

図の $\mathrm{A_2}$ 地点から G 地点への経路の総数は

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \ (\text{通り})$$

よって，求める経路の総数は

$$2 \times 10 = \mathbf{20} \ (\text{通り})$$



(2) a，b を通り抜ける事象を，それぞれ A，B とする．
b を通り抜る経路 ($\mathrm{S} \to \mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2 \to \mathrm{G}$) の総数を $n(B)$ とすると

$$n(B) = \frac{6!}{4!2!} \times 1 = 15 \quad (\text{通り})$$

a と b を通り抜ける経路 ($\mathrm{S} \to \mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2 \to \mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2 \to \mathrm{G}$) の総数を $n(A \cap B)$ とすると

$$n(A \cap B) = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

a を通り抜けずに b を通り抜ける経路の総数を $n(\overline{A} \cap B)$ とすると

$$n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 6 = \mathbf{9} \quad (\text{通り})$$

(3) a 通り抜ける経路の総数を $n(A)$ とすると，(1) の結果から　$n(A) = 20$
a を通り b を通り抜けいない経路の総数を $n(A \cap \overline{B})$ とすると

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14 \quad (\text{通り})$$

a または b を通り抜ける経路の総数を $n(A \cup B)$ とすると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29 \quad (\text{通り})$$

すべての経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U) = \frac{8!}{4!4!} = 70 \quad (\text{通り})$$

a も b も通り抜けない経路の総数を $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ とすると

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 29 = 41 \quad (\text{通り})$$

S から G に到達するまでの時間 X とその確率 P は

(i) $A \cap B$ のとき　$X = 2 \times 6 + 1 + 8 = 21$，$P = \dfrac{6}{70}$

(ii) $\overline{A} \cap B$ のとき　$X = 2 \times 7 + 8 = 22$，$P = \dfrac{9}{70}$

(iii) $A \cap \overline{B}$ のとき　$X = 2 \times 7 + 1 = 15$，$P = \dfrac{14}{70}$

(iv) $\overline{A} \cap \overline{B}$ のとき　$X = 2 \times 8 = 16$，$P = \dfrac{41}{70}$

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 21 \cdot \frac{6}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 15 \cdot \frac{14}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} \\ &= 15 + \frac{6 \cdot 6 + 7 \cdot 9 + 1 \cdot 41}{70} = \mathbf{17} \quad (\text{分}) \end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ より

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\left(x+\frac{\pi}{3}\right)'-|\sin x|=\boldsymbol{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|}$$

(2) (1) の結果を利用する．

(i) $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}\\&=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}\\&=-\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}|\sin(\theta+\pi)|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta=f(0)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=1,\\f\left(\frac{5\pi}{6}\right)&=\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}|\sin\theta|\,d\theta=\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\sin\theta\,d\theta-\int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}}\sin\theta\,d\theta\\&=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}+\Big[\cos\theta\Big]_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}}=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{3}}$ **で最大値** $\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{x=\dfrac{5\pi}{6}}$ **で最小値** $\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

別解　(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin\theta|\,d\theta = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_x^{x+\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(ii) $\dfrac{2\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin\theta|\,d\theta = \int_x^{\pi} \sin\theta\,d\theta - \int_\pi^{x+\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta$$
$$= \Big[-\cos\theta\Big]_x^{\pi} + \Big[\cos\theta\Big]_\pi^{x+\frac{\pi}{3}} = 2+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(i)，(ii) より

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$2-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}$ **で最大値** $\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{x = \dfrac{5\pi}{6}}$ **で最小値** $\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ ■