平成 25 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 a と b を正の実数とする．$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y = b\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする．

(1) P の x 座標を t とする．このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ．

(2) C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ．

(3) C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする．
このとき，$T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ．

2 座標平面上で，直線 $y = x$ に関する対称移動を f とし，実数 c に対して，直線 $y = cx$ に関する対称移動を g とする．また，原点を中心とする 120° の回転移動を h とする．

(1) f を表す行列，および h を表す行列を求めよ．

(2) g を表す行列を求めよ．

(3) 合成変換 $f \circ g$ が h になるように c の値を定めよ．

3 実数 x，y，s，t に対し，$z = x + yi$，$w = s + ti$ とおいたとき，

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$

をみたすとする．ただし，i は虚数単位である．

(1) w を z で表し，s，t を x，y で表せ．

(2) $0 \leqq s \leqq 1$ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ．

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x + y$ の最小値を求めよ．

4 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある．2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする．

(i) X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く．

(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く．

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く．

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする．

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1,\ 0)$ にある確率を求めよ．

(2) 2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ．

(3) 2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ．

5 区間 $-\infty < x < \infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^{2\pi} tf(2x-t)\,dt$$

とおく．

(1) $F\left(\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ．

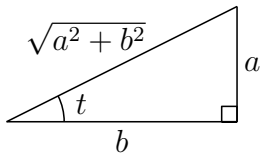
(2) 2 次導関数 F'' を f で表せ．

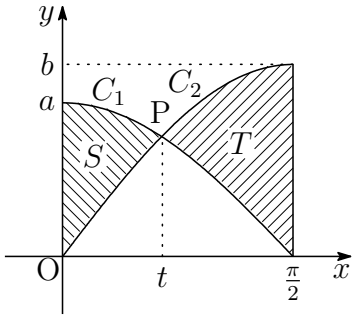
(3) F が 3 次多項式で $F(1) = f(1) = 1$ となるとき，f と F を求めよ．

解答例

1 (1) 点 P の x 座標が t であるから

$$a\cos t = b\sin t \quad \text{ゆえに} \quad \tan t = \frac{a}{b}$$





上の図の直角三角形から $\quad \boldsymbol{\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}, \quad \boldsymbol{\cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(2) S は右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (a\cos x - b\sin x)\,dx \\ &= \Big[\, a\sin x + b\cos x \,\Big]_0^t = a\sin t + b\cos t - b \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - b = \boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2} - b} \end{aligned}$$

(3) T は右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} T &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} (b\sin x - a\cos x)\,dx \\ &= \Big[\, -b\cos x - a\sin x \,\Big]_t^{\frac{\pi}{2}} = -a + b\cos t + a\sin t \\ &= -a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2} - a \end{aligned}$$

上式および (2) の結果を $T = 2S$ に代入すると

$$\sqrt{a^2+b^2} - a = 2(\sqrt{a^2+b^2} - b) \quad \text{ゆえに} \quad 2b - a = \sqrt{a^2+b^2} \quad \cdots(*)$$

$2b - a > 0$ であるから $\quad b > \dfrac{a}{2} \quad \cdots$①

$(*)$ の両辺を平方して整理すると $\quad b(3b-4a) = 0 \quad \cdots$②

① に注意して，② を解くと $\quad \boldsymbol{b = \dfrac{4}{3}a}$ ■

2 (1) f，h の表す行列をそれぞれ F，H とすると

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-\sqrt{3}} \\ \mathbf{\sqrt{3}} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(2) g の表す行列を G とすると

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\quad G \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix}$

よって $\quad G = \dfrac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+c^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1-c^2} & \mathbf{2c} \\ \mathbf{2c} & \mathbf{c^2-1} \end{pmatrix}$$

(3)
$$FG = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & c^2-1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 2c & c^2-1 \\ 1-c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

$FG = H$ であるから，成分を比較して

$$\frac{2c}{1+c^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1-c^2}{1+c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$c^2 + 4c + 1 = 0, \quad c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

上の第 1 式から　$c = -2 \pm \sqrt{3}$，　第 2 式から　$c = \pm(2-\sqrt{3})$

よって，求める c の値は　　$\boldsymbol{c = -2 + \sqrt{3}}$ ■

3 (1) $z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ であるから

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{1-|z|^2+(z-\overline{z})}{|1-z|^2}$$

$z=x+yi$ より，$1-z=(1-x)-yi$，$z-\overline{z}=2yi$ であるから

$$w=\frac{1-(x^2+y^2)+2yi}{(1-x)^2+y^2}$$

$w=s+ti$ であるから

$$\boldsymbol{s=\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2},\quad t=\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}}$$

(2) (1) の結果を $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ に代入すると

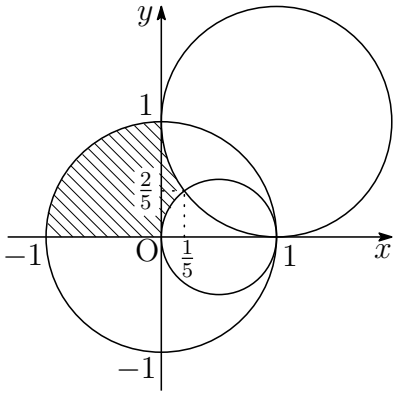
$$0\leqq\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}\leqq 1$$

上の第 1 式および第 2 式から，それぞれ

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2\leqq 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$(**)\begin{cases} y\geqq 0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1\end{cases}$$

を得る．D は $(*)$ と $(**)$ の共通部分で，その領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(3) $(*)$ の第 2 式および $(**)$ の第 2 式の境界線の方程式は

$$\begin{cases} x^2+y^2-x=0 & \cdots① \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

上の 2 式から x^2+y^2 を消去すると　$x=1-2y$　$\cdots③$

①，③ を解いて　$(x,\ y)=(1,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

$k=-5x+y$ とおくと　　$y=5x+k$

D を通る傾き 5 の直線群の切片 k が最小となるのは，$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ を通るときで，その最小値は

$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\boldsymbol{-\frac{3}{5}}$$

■

4 (1) 2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を 4 で割った余りから

(i) 点 P が x 軸方向に -1 動く確率は $\dfrac{15}{36}$

(ii) 点 P が y 軸方向に -1 動く確率は $\dfrac{5}{36}$

(iii) 点 P が x 軸方向に $+1$ 動く確率は $\dfrac{12}{36}$

(iv) 点 P が y 軸方向に $+1$ 動く確率は $\dfrac{4}{36}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

よって，求める確率は $\dfrac{15}{36}=\boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

(2) 3 回投げて，(iii) が 2 回，(iv) が 1 回起こる確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{12}{36}\right)^2\cdot\frac{4}{36}=3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{27}} $$

(3) 4 回投げて，(i),(ii),(iii),(iv) がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回起きたすると

$$ \begin{cases} a+b+c+d=4 \\ -a+c=1 \\ -b+d=1 \end{cases} $$

$(*)$ の第 2 式，第 3 式から　$c=a+1,\ d=b+1$

これらを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$ a+b+(a+1)+(b+1)=4 \quad \text{ゆえに} \quad a+b=1 $$

したがって　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1,\ 2)$

よって，求める確率は

$$ \begin{aligned} &\frac{4!}{1!2!1!}\cdot\frac{15}{36}\left(\frac{12}{36}\right)^2\cdot\frac{4}{36}+\frac{4!}{1!1!2!}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{12}{36}\left(\frac{4}{36}\right)^2 \\ =&12\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+12\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81}=\boldsymbol{\frac{50}{729}} \end{aligned} $$

■

5 (1) $F(x)=\displaystyle\int_0^{2x} tf(2x-t)\,dt$ より　$F\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{x} tf(x-t)\,dt$

上の第 2 式において，$s=x-t$ とおくと　$\dfrac{dt}{ds}=-1$

t	$0 \longrightarrow x$
s	$x \longrightarrow 0$

$$F\left(\frac{x}{2}\right)=\int_x^0 (x-s)f(s)\,(-ds)=\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$

(2) (1) の結果から

$$F\left(\frac{x}{2}\right)=x\int_0^x f(s)\,ds-\int_0^x sf(s)\,ds \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F'\left(\frac{x}{2}\right)&=\int_0^x f(s)\,ds+xf(x)-xf(x)\\&=\int_0^x f(s)\,ds \qquad \cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ の両辺を x について微分すると

$$\frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$$

上式より　$F''\left(\dfrac{x}{2}\right)=4f(x)$　よって　$\boldsymbol{F''(x)=4f(2x)}$

(3) (2) の結果に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$F''\left(\dfrac{1}{2}\right)=4f(1)=4$　$\cdots$①

$(*)$ および $(**)$ に $x=0$ を代入すると　$F(0)=0$，$F'(0)=0$　$\cdots$②

$F(x)$ は ② を満たす 3 次関数であるから，定数 a，b を用いて

$$F(x)=ax^3+bx^2 \quad \text{ゆえに} \quad F''(x)=6ax+2b$$

与えられた条件 $F(1)=1$ および ① から

$$a+b=1,\quad 3a+2b=4 \quad \text{これを解いて} \quad a=2,\ b=-1$$

よって　$\boldsymbol{F(x)=2x^3-x^2}$，　$F''(x)=12x-2$

また　$f(x)=\dfrac{1}{4}F''\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(6x-2)=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}}$ ■