

平成25年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

- 1 a と b を正の実数とする. $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフを C_1 ,
 $y = b \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフを C_2 とし, C_1 と C_2 の交点を P とする.

- (1) P の x 座標を t とする. このとき, $\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ.
- (2) C_1 , C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ.
- (3) C_1 , C_2 と直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする.
このとき, $T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ.

- 2 座標平面上で, 直線 $y = x$ に関する対称移動を f とし, 実数 c に対して, 直線 $y = cx$ に関する対称移動を g とする. また, 原点を中心とする 120° の回転移動を h とする.

- (1) f を表す行列, および h を表す行列を求めよ.
- (2) g を表す行列を求めよ.
- (3) 合成変換 $f \circ g$ が h になるように c の値を定めよ.

- 3 実数 x, y, s, t に対し, $z = x + yi$, $w = s + ti$ とおいたとき,

$$z = \frac{w - 1}{w + 1}$$

をみたすとする. ただし, i は虚数単位である.

- (1) w を z で表し, s, t を x, y で表せ.
- (2) $0 \leq s \leq 1$ かつ $0 \leq t \leq 1$ となるような (x, y) の範囲 D を座標平面上に図示せよ.
- (3) 点 $P(x, y)$ が D を動いたとき, $-5x + y$ の最小値を求めよ.

4 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある. 2個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする.

- (i) X が 4 の倍数ならば, 点 P は x 軸方向に -1 動く.
- (ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば, 点 P は y 軸方向に -1 動く.
- (iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.
- (iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば, 点 P は y 軸方向に $+1$ 動く.

たとえば, 2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.

以下のいずれの問題でも, 点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする.

- (1) 2個のサイコロを 1 回投げて, 点 P が $(-1, 0)$ にある確率を求めよ.
- (2) 2個のサイコロを 3 回投げて, 点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ.
- (3) 2個のサイコロを 4 回投げて, 点 P が $(1, 1)$ にある確率を求めよ.

5 区間 $-\infty < x < \infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^{2\pi} tf(2x - t) dt$$

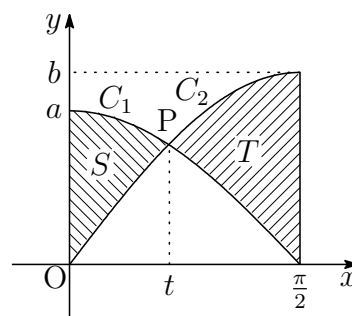
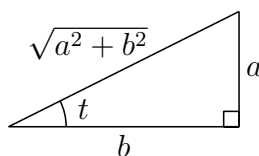
とおく.

- (1) $F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x (x - s)f(s) ds$ となることを示せ.
- (2) 2次導関数 F'' を f で表せ.
- (3) F が 3次多項式で $F(1) = f(1) = 1$ となるとき, f と F を求めよ.

解答例

1 (1) 点Pの x 座標が t であるから

$$a \cos t = b \sin t \quad \text{ゆえに} \quad \tan t = \frac{a}{b}$$



$$\text{上の図の直角三角形から} \quad \sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2) S は右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (a \cos x - b \sin x) dx \\ &= \left[a \sin x + b \cos x \right]_0^t = a \sin t + b \cos t - b \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - b = \sqrt{a^2 + b^2} - b \end{aligned}$$

(3) T は右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} T &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} (b \sin x - a \cos x) dx \\ &= \left[-b \cos x - a \sin x \right]_t^{\frac{\pi}{2}} = -a + b \cos t + a \sin t \\ &= -a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{aligned}$$

上式および(2)の結果を $T = 2S$ に代入すると

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a = 2(\sqrt{a^2 + b^2} - b) \quad \text{ゆえに} \quad 2b - a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots (*)$$

$$2b - a > 0 \text{ であるから } b > \frac{a}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(*) \text{ の両辺を平方して整理すると } b(3b - 4a) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して, } \textcircled{2} \text{ を解くと } b = \frac{4}{3}a \quad \blacksquare$$

2 (1) f, h の表す行列をそれぞれ F, H とすると

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(2) g の表す行列を G とすると

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに
$$G \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix}$$

よって
$$G = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & c^2-1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$FG = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & c^2-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 2c & c^2-1 \\ 1-c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

$FG = H$ であるから、成分を比較して

$$\frac{2c}{1+c^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1-c^2}{1+c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上の2式をそれぞれ変形すると

$$c^2 + 4c + 1 = 0, \quad c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

上の第1式から $c = -2 \pm \sqrt{3}$, 第2式から $c = \pm(2-\sqrt{3})$

よって、求める c の値は $c = -2 + \sqrt{3}$ ■

3 (1) $z = \frac{w-1}{w+1}$ より, $w = \frac{1+z}{1-z}$ であるから

$$w = \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2 + (z-\bar{z})}{|1-z|^2}$$

$z = x + yi$ より, $1-z = (1-x) - yi$, $z-\bar{z} = 2yi$ であるから

$$w = \frac{1-(x^2+y^2) + 2yi}{(1-x)^2 + y^2}$$

$w = s + ti$ であるから

$$s = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2 + y^2}, \quad t = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}$$

(2) (1) の結果を $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ に代入すると

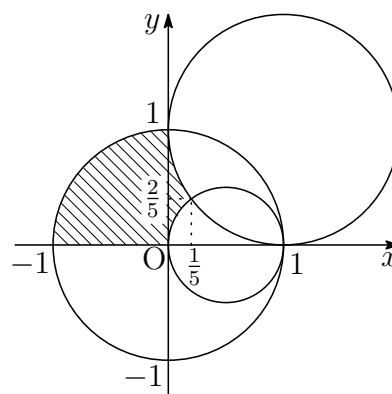
$$0 \leq \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2 + y^2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2} \leq 1$$

上の第1式および第2式から, それぞれ

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(**) \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

を得る. D は $(*)$ と $(**)$ の共通部分で, その領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む.



(3) $(*)$ の第2式および $(**)$ の第2式の境界線の方程式は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

上の2式から $x^2 + y^2$ を消去すると $x = 1 - 2y$ $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ を解いて $(x, y) = (1, 0), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$k = -5x + y$ とおくと $y = 5x + k$

D を通る傾き5の直線群の切片 k が最小となるのは, $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ を通るときで, その最小値は

$$k = -5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$



4 (1) 2個のサイコロを同時に投げて出た目の積を4で割った余りから

(i) 点Pが x 軸方向に -1 動く確率は $\frac{15}{36}$

(ii) 点Pが y 軸方向に -1 動く確率は $\frac{5}{36}$

(iii) 点Pが x 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{12}{36}$

(iv) 点Pが y 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{4}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

よって、求める確率は $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

(2) 3回投げて、(iii)が2回、(iv)が1回起こる確率であるから

$${}_3C_2 \left(\frac{12}{36}\right)^2 \cdot \frac{4}{36} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

(3) 4回投げて、(i),(ii),(iii),(iv)がそれぞれ a 回、 b 回、 c 回、 d 回起きたすると

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ -a + c = 1 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

(*)の第2式、第3式から $c = a + 1$, $d = b + 1$

これらを(*)の第1式に代入すると

$$a + b + (a + 1) + (b + 1) = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 1$$

したがって $(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2)$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{4!}{1!2!1!} \cdot \frac{15}{36} \left(\frac{12}{36}\right)^2 \cdot \frac{4}{36} + \frac{4!}{1!1!2!} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{12}{36} \left(\frac{4}{36}\right)^2 \\ &= 12 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} = \frac{50}{729} \end{aligned}$$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad F(x) = \int_0^{2x} tf(2x-t) dt \text{ より } F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x tf(x-t) dt$$

上の第2式において, $s = x - t$ とおくと $\frac{dt}{ds} = -1$

t	$0 \longrightarrow x$
s	$x \longrightarrow 0$

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_x^0 (x-s)f(s)(-ds) = \int_0^x (x-s)f(s) ds$$

(2) (1)の結果から

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = x \int_0^x f(s) ds - \int_0^x sf(s) ds \quad \dots (*)$$

(*)の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F'\left(\frac{x}{2}\right) &= \int_0^x f(s) ds + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(s) ds \quad \dots (**)$$

(**)の両辺を x について微分すると

$$\frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

上式より $F''\left(\frac{x}{2}\right) = 4f(x)$ よって $F''(x) = 4f(2x)$

(3) (2)の結果に $x = \frac{1}{2}$ を代入すると $F''\left(\frac{1}{2}\right) = 4f(1) = 4 \quad \dots \textcircled{1}$

(*) および (**) に $x = 0$ を代入すると $F(0) = 0, F'(0) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$F(x)$ は $\textcircled{2}$ を満たす3次関数であるから, 定数 a, b を用いて

$$F(x) = ax^3 + bx^2 \quad \text{ゆえに} \quad F''(x) = 6ax + 2b$$

与えられた条件 $F(1) = 1$ および $\textcircled{1}$ から

$$a + b = 1, \quad 3a + 2b = 4 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2, b = -1$$

よって $F(x) = 2x^3 - x^2, \quad F''(x) = 12x - 2$

また $f(x) = \frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(6x - 2) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ ■