平成 24 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 k は実数，a，b，c，d は $ad-bc=1$ を満たす実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す移動は以下の 3 条件を満たすとする．

(イ) 直線 $y=x$ 上の点は直線 $y=x$ 上の点に移る．
(ロ) 直線 $y=-x$ 上の点は直線 $y=-x$ 上の点に移る．
(ハ) x 軸上の点は直線 $y=kx$ 上の点に移る．

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) A を k で表せ．

2 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta)=4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$$

を考える．

(1) $x=\sin\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x で表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

(3) 方程式 $f(\theta)=k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

3 次の問に答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ．

(3) 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

を求めよ．

4 実数 a，b に対して，$f(x) = x^2 - 2ax + b$，$g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく．

(1) $a \neq b$ のとき，$f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ．

(2) (1) で求めた x について，a，b が条件 $a < c < b$ を満たすとする．このとき，連立不等式

$$f(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) < 0$$

が解をもつため必要十分条件を a，b を用いて表せ．

(3) 一般に $a < b$ のとき，連立不等式

$$f(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を求め，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

5 A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p + q = 1$ とする．A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1) P_2 を p と q で表せ．

(2) P_3 を p と q で表せ．

(3) P_4 を p と q で表せ．

(4) $\dfrac{1}{2} < q < 1$ のとき，$P_4 < P_3$ であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A により直線 $y=x$ 上の点 $(1,\ 1)$ は点 $(a+b,\ c+d)$ に移動し，この点が直線 $y=x$ 上にあるから

$$c+d=a+b \quad \cdots ①$$

A により直線 $y=-x$ 上の点 $(1,-1)$ は点 $(a-b,\ c-d)$ に移動し，この点が直線 $y=-x$ 上にあるから

$$c-d=-a+b \quad \cdots ②$$

A により x 上の点 $(1,\ 0)$ は点 $(a,\ c)$ に移動し，この点が直線 $y=kx$ 上にあるから

$$c=ka \quad \cdots ③$$

①，②，③ を解いて　　$c=b=ka$，$d=a \quad \cdots (*)$

これを $ad-bc=1$ に代入すると

$$a^2-k^2a^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(1-k^2)=1 \quad \cdots (**)$$

上の第 2 式から，$a^2>0$ に注意して

$$1-k^2>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1<k<1}$$

(2) $(**)$ より $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ を $(*)$ に代入することにより

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\boldsymbol{\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}}$$

■

2 (1) $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$

$$= 4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta + 3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta) - 4\sin\theta$$
$$= -8\sin^3\theta - 6\sqrt{2}\sin^2\theta + 3\sqrt{2}$$
$$= \boldsymbol{-8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$．$g(x) = f(\theta)$ とおくと

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$$
$$g'(x) = -24x^2 - 6\sqrt{2}x = -24x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって，$g(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$8-3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8-3\sqrt{2}$

$g(0) - g(-1) = 3\sqrt{2} - (8-3\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2}-4) = 2(\sqrt{18}-4) > 0$

よって　$x = 0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-8-3\sqrt{2}}$

(3) $x = \sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$x\,(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して，
$\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が $1:1$ に対応する．$f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつとき，$g(x) = k$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ において 3 つの解をもつ．増減表により

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < k \leqq g(-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2\sqrt{2} < k \leqq 8 - 3\sqrt{3}}$$

補足 $y = g(x)$ は，$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で極小，$x = 0$ で極大，これらの中央 $x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ でグラフの変曲点．これらを元に等差数列をなす 5 つの x 座標をとる．

$$-\frac{3}{2\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad 0,\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

とくに，$g\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right) = g(0)$，$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = g\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ が成立する[1]．
このとき，$-\dfrac{3}{2\sqrt{2}} < -1$，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x)$ は最大値 $g(0)$，最小値 $g(1)$ をとる．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2015.pdf $\boxed{1}$ を参照

3 (1) $x \geqq 0$ のとき $\displaystyle\int_0^x (1-\cos t)\,dt \geqq 0$ ゆえに $x - \sin x \geqq 0$ $\cdots$①

① より $\displaystyle\int_0^x (t-\sin t)\,dt \geqq 0$ ゆえに $\dfrac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geqq 0$

上式から $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t\right) dt \geqq 0$

したがって $\dfrac{x^3}{6} - x + \sin x \geqq 0$ $\cdots$②

①，② より，$x \geqq 0$ のとき $x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$

(2) (1) の結果から，$x \geqq 0$ のとき

$$\int_0^x t\left(t - \frac{t^3}{6}\right) dt \leqq \int_0^x t\sin t\,dt \leqq \int_0^x t^2\,dt$$

よって，$x \geqq 0$ のとき $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \frac{x^3}{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt = \Big[\sin t - t\cos t\Big]_0^x = \sin x - x\cos x$

上式および (2) の結果から，$x > 0$ のとき

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leqq \sin x - x\cos x \leqq \frac{x^3}{3}$$

したがって $\dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{30} \leqq \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} \leqq \dfrac{1}{3}$ $\cdots(*)$

$x < 0$，すなわち，$-x > 0$ のとき $(*)$ は成立するから

$$\frac{1}{3} - \frac{(-x)^2}{30} \leqq \frac{\sin(-x) - (-x)\cos(-x)}{(-x)^3} \leqq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leqq \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \leqq \frac{1}{3}$$

ゆえに，$(*)$ は，$x \neq 0$ について成立する．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30}\right) = \frac{1}{3}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

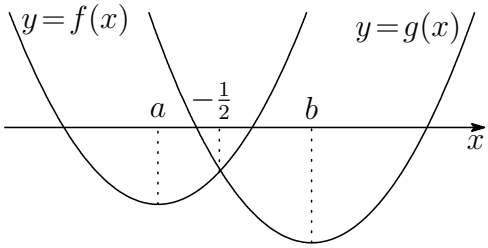
■

4 (1) $f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ を $f(c)=g(c)$ に適用すると

$$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a \quad \text{ゆえに} \quad (a-b)(2c+1)=0$$

$a\neq b$ より，$a-b\neq 0$ であるから　$2c+1=0$　よって　$\boldsymbol{c=-\dfrac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax+b \\ &= (x-a)^2-a^2+b \\ g(x) &= x^2-2bx+a \\ &= (x-b)^2-b^2+a \end{aligned}$$



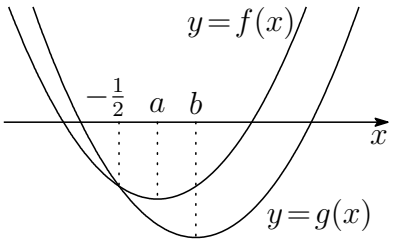
条件を満たす必要十分条件は，
(1) の結果に注意して

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=a+b+\frac{1}{4}<0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a+b<-\frac{1}{4}}$$

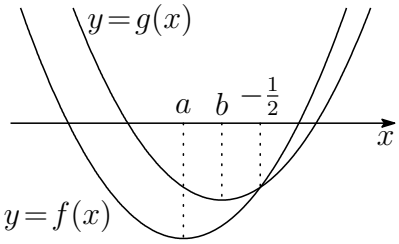
(3) (i) $-\dfrac{1}{2}\leqq a<b$ のとき　$f(a)=-a^2+b<0$　ゆえに　$b<a^2$

(ii) $a<b\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$g(b)=-b^2+a<0$　ゆえに　$a<b^2$

(i) $-\frac{1}{2}\leqq a<b$ のとき



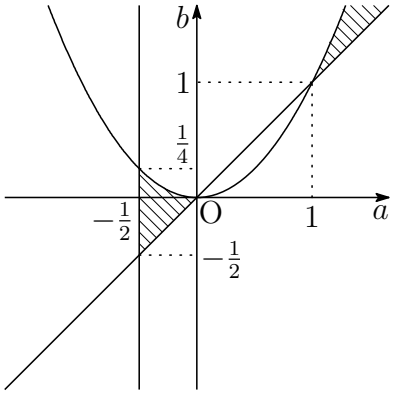
(ii) $a<b\leqq -\frac{1}{2}$ のとき



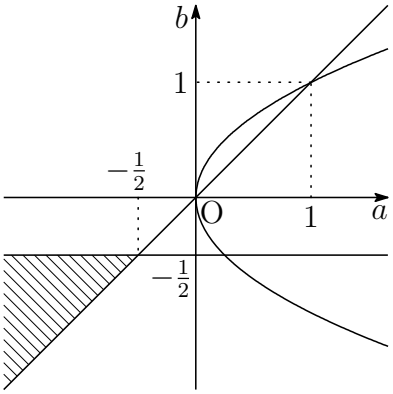
(iii) $a < -\dfrac{1}{2} < b$ のとき，(2) の結果から　$a + b < -\dfrac{1}{4}$

条件を満たす点 $(a,\ b)$ は下の図の (i)〜(iii) の表す領域であるから，求める領域は，右下の図の斜線部分で境界線を含まない．

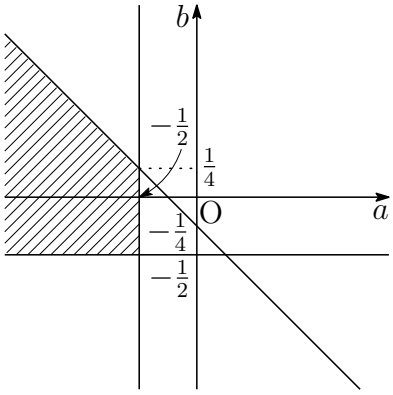
(i) $-\frac{1}{2} \leqq a < b,\ b < a^2$

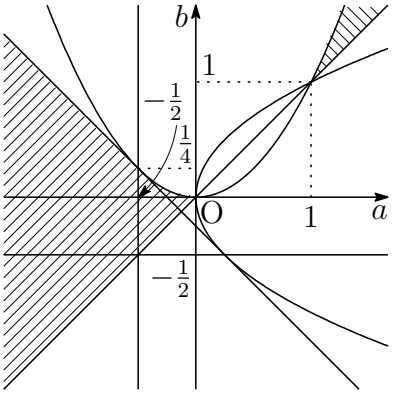


(ii) $a < b \leqq -\frac{1}{2},\ a < b^2$



(iii) $a < -\frac{1}{2} < b,\ a + b < -\frac{1}{4}$





■

5 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は，1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2\mathrm{C}_1 pq)p = \boldsymbol{p^2(1 + 2q)}$$

(2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は，2 勝 0 敗，2 勝 1 敗，2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3\mathrm{C}_1 p^2 q + {}_4\mathrm{C}_2 p^2 q^2)p = \boldsymbol{p^3(1 + 3q + 6q^2)}$$

(3) A が B に 4 勝する直前の勝敗は，3 勝 0 敗，3 勝 1 敗，3 勝 2 敗，3 勝 3 敗であるから

$$\begin{aligned} P_4 &= (p^3 + {}_4\mathrm{C}_1 p^3 q + {}_5\mathrm{C}_2 p^3 q^2 + {}_6\mathrm{C}_3 p^3 q^3)p \\ &= \boldsymbol{p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)} \end{aligned}$$

(4) (2),(3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{P_3-P_4}{p^3} &= 1+3q+6q^2-p(1+4q+10q^2+20q^3)\\ &= 1+3q+6q^2-(1-q)(1+4q+10q^2+20q^3)\\ &= 10q^3(2q-1)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}<q<1$ より，$2q-1>0$ であるから

$$P_3-P_4>0 \quad \text{よって} \quad P_4<P_3$$

解説 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ と表記すると　$P_k=p^k\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix}q^j$

$$\begin{aligned}\frac{P_k-P_{k+1}}{p^k} &= \sum_{j=0}^{k-1}\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix}q^j-p\sum_{j=0}^{k}\begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix}q^j\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix}q^j-(1-q)\sum_{j=0}^{k}\begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix}q^j\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left\{\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix}\right\}q^j\\ &\qquad +\sum_{j=0}^{k}\begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix}q^{j+1}-\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k\\ &= \sum_{j=1}^{k-1}\left\{\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k+j \\ j \end{pmatrix}\right\}q^j\\ &\qquad +\sum_{j=1}^{k+1}\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j-1 \end{pmatrix}q^j-\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k\\ &= -\sum_{j=1}^{k-1}\begin{pmatrix} k-1+j \\ j-1 \end{pmatrix}q^j+\sum_{j=1}^{k+1}\begin{pmatrix} k+j-1 \\ j-1 \end{pmatrix}q^j-\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k\\ &= \begin{pmatrix} 2k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}q^k+\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^{k+1}-\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k+\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^{k+1}-\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k\\ &= \left(q-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}q^k>0 \qquad \left(\frac{1}{2}<q<1 \text{ のとき}\right)\end{aligned}$$

■