

平成24年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

1 k は実数, a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

の表す移動は以下の3条件を満たすとする.

- (イ) 直線 $y = x$ 上の点は直線 $y = x$ 上の点に移る.
- (ロ) 直線 $y = -x$ 上の点は直線 $y = -x$ 上の点に移る.
- (ハ) x 軸上の点は直線 $y = kx$ 上の点に移る.

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) A を k で表せ.

2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える.

- (1) $x = \sin \theta$ とおく. $f(\theta)$ を x で表せ.
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ.
- (3) 方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる3つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ.

3 次の問に答えよ.

- (1) $x \geq 0$ のとき, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ を示せ.
- (2) $x \geq 0$ のとき, $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \frac{x^3}{3}$ を示せ.
- (3) 極限值

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$$

を求めよ.

4 実数 a, b に対して, $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく.

- (1) $a \neq b$ のとき, $f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ.
 (2) (1) で求めた x について, a, b が条件 $a < c < b$ を満たすとする. このとき, 連立不等式

$$f(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ.

- (3) 一般に $a < b$ のとき, 連立不等式

$$f(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を求め, その条件をみたす点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ.

5 A と B の 2 チームが試合を行い, どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す. 各試合で A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q とし, $p + q = 1$ とする. A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく.

- (1) P_2 を p と q で表せ.
 (2) P_3 を p と q で表せ.
 (3) P_4 を p と q で表せ.
 (4) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき, $P_4 < P_3$ であることを示せ.

解答例

- 1 (1) A により直線 $y = x$ 上の点 $(1, 1)$ は点 $(a + b, c + d)$ に移動し、この点が直線 $y = x$ 上にあるから

$$c + d = a + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

A により直線 $y = -x$ 上の点 $(1, -1)$ は点 $(a - b, c - d)$ に移動し、この点が直線 $y = -x$ 上にあるから

$$c - d = -a + b \quad \cdots \textcircled{2}$$

A により x 上の点 $(1, 0)$ は点 (a, c) に移動し、この点が直線 $y = kx$ 上にあるから

$$c = ka \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ を解いて $c = b = ka, d = a \quad \cdots (*)$

これを $ad - bc = 1$ に代入すると

$$a^2 - k^2 a^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(1 - k^2) = 1 \quad \cdots (**)$$

上の第2式から、 $a^2 > 0$ に注意して

$$1 - k^2 > 0 \quad \text{よって} \quad -1 < k < 1$$

- (2) $(**)$ より $a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$ を $(*)$ に代入することにより

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \quad (1) \quad f(\theta) &= 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta \\
 &= 4(1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta + 3\sqrt{2}(1 - 2 \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta \\
 &= -8 \sin^3 \theta - 6\sqrt{2} \sin^2 \theta + 3\sqrt{2} \\
 &= -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } -1 \leq x \leq 1. \quad g(x) = f(\theta) \text{ とおくと}$$

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$$

$$g'(x) = -24x^2 - 6\sqrt{2}x = -24x \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

したがって, $g(x)$ の増減表は

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$...	0	...	1
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$8 - 3\sqrt{2}$	\searrow	$2\sqrt{2}$	\nearrow	$3\sqrt{2}$	\searrow	$-8 - 3\sqrt{2}$

$$g(0) - g(-1) = 3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2} - 4) = 2(\sqrt{18} - 4) > 0$$

よって $x = 0$ すなわち $\theta = 0$ のとき 最大値 $3\sqrt{2}$

$x = 1$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき 最小値 $-8 - 3\sqrt{2}$

(3) $x = \sin \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ より, x ($-1 \leq x \leq 1$) に対して,
 θ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ が 1 : 1 に対応する. $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつとき, $g(x) = k$ は $-1 \leq x \leq 1$ において 3 つの解をもつ. 増減表により

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < k \leq g(-1) \quad \text{すなわち} \quad 2\sqrt{2} < k \leq 8 - 3\sqrt{3}$$

補足 $y = g(x)$ は, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極小, $x = 0$ で極大, これらの中央 $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ でグラフの変曲点. これらを元に等差数列をなす 5 つの x 座標をとる.

$$-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

とくに, $g\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = g(0)$, $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ が成立する¹.

このとき, $-\frac{3}{2\sqrt{2}} < -1$, $\frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$ であるから, $-1 \leq x \leq 1$ において, $g(x)$ は最大値 $g(0)$, 最小値 $g(1)$ をとる. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri.2015.pdf 1 を参照

$$\boxed{3} \quad (1) \quad x \geq 0 \text{ のとき } \int_0^x (1 - \cos t) dt \geq 0 \quad \text{ゆえに } x - \sin x \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \int_0^x (t - \sin t) dt \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0$$

$$\text{上式から } \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \right) dt \geq 0$$

$$\text{したがって } \frac{x^3}{6} - x + \sin x \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } x \geq 0 \text{ のとき } x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

(2) (1) の結果から, $x \geq 0$ のとき

$$\int_0^x t \left(t - \frac{t^3}{6} \right) dt \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\text{よって, } x \geq 0 \text{ のとき } \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$(3) \quad \int_0^x t \sin t dt = \left[\sin t - t \cos t \right]_0^x = \sin x - x \cos x$$

上式および (2) の結果から, $x > 0$ のとき

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \sin x - x \cos x \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\text{したがって } \frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leq \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \leq \frac{1}{3} \quad \dots (*)$$

$x < 0$, すなわち, $-x > 0$ のとき (*) は成立するから

$$\frac{1}{3} - \frac{(-x)^2}{30} \leq \frac{\sin(-x) - (-x) \cos(-x)}{(-x)^3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leq \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \leq \frac{1}{3}$$

ゆえに, (*) は, $x \neq 0$ について成立する.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \right) = \frac{1}{3}$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

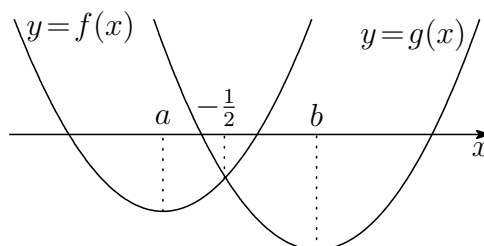


- 4 (1) $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = x^2 - 2bx + a$ を $f(c) = g(c)$ に適用すると

$$c^2 - 2ac + b = c^2 - 2bc + a \quad \text{ゆえに} \quad (a-b)(2c+1) = 0$$

$$a \neq b \text{ より, } a-b \neq 0 \text{ であるから } 2c+1=0 \quad \text{よって} \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= x^2 - 2ax + b \\ &= (x-a)^2 - a^2 + b \\ g(x) &= x^2 - 2bx + a \\ &= (x-b)^2 - b^2 + a \end{aligned}$$

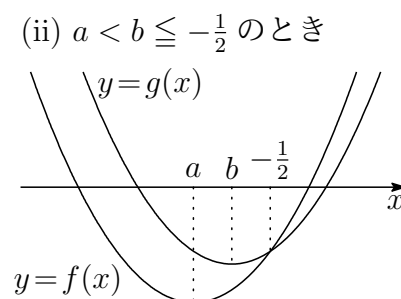
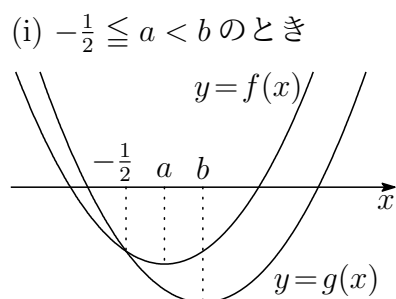


条件を満たす必要十分条件は,

(1) の結果に注意して

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = a + b + \frac{1}{4} < 0 \quad \text{よって} \quad a + b < -\frac{1}{4}$$

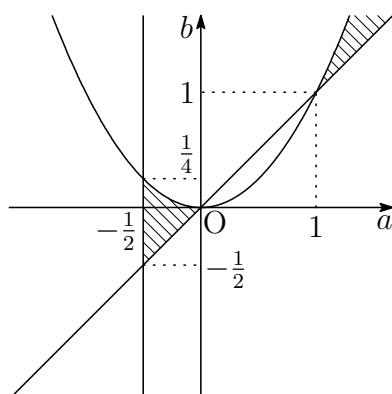
- (3) (i) $-\frac{1}{2} \leq a < b$ のとき $f(a) = -a^2 + b < 0$ ゆえに $b < a^2$
(ii) $a < b \leq -\frac{1}{2}$ のとき $g(b) = -b^2 + a < 0$ ゆえに $a < b^2$



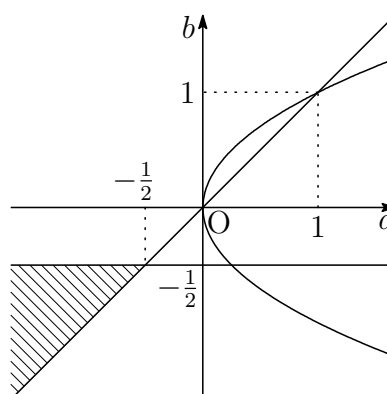
(iii) $a < -\frac{1}{2} < b$ のとき, (2) の結果から $a + b < -\frac{1}{4}$

条件を満たす点 (a, b) は下の図の (i)~(iii) の表す領域であるから, 求める領域は, 右下の図の斜線部分で境界線を含まない.

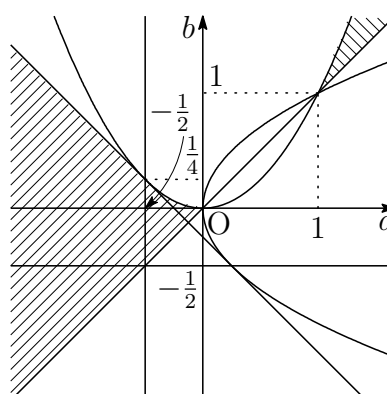
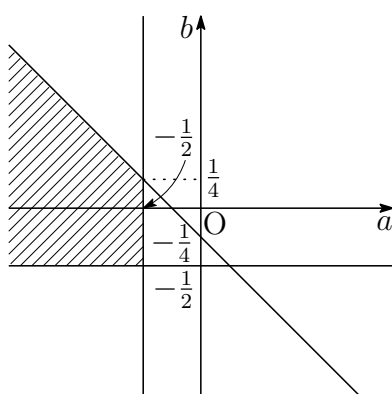
(i) $-\frac{1}{2} \leq a < b, b < a^2$



(ii) $a < b \leq -\frac{1}{2}, a < b^2$



(iii) $a < -\frac{1}{2} < b, a + b < -\frac{1}{4}$



5 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は, 1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2C_1pq)p = p^2(1 + 2q)$$

(2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は, 2 勝 0 敗, 2 勝 1 敗, 2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3C_1p^2q + {}_4C_2p^2q^2)p = p^3(1 + 3q + 6q^2)$$

(3) A が B に 4 勝する直前の勝敗は, 3 勝 0 敗, 3 勝 1 敗, 3 勝 2 敗, 3 勝 3 敗であるから

$$\begin{aligned} P_4 &= (p^3 + {}_4C_1p^3q + {}_5C_2p^3q^2 + {}_6C_3p^3q^3)p \\ &= p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3) \end{aligned}$$

(4) (2),(3)の結果から

$$\begin{aligned}\frac{P_3 - P_4}{p^3} &= 1 + 3q + 6q^2 - p(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3) \\ &= 1 + 3q + 6q^2 - (1 - q)(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3) \\ &= 10q^3(2q - 1)\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < q < 1$ より, $2q - 1 > 0$ であるから

$$P_3 - P_4 > 0 \quad \text{よって} \quad P_4 < P_3$$

解説 2項係数 ${}_nC_r$ を $\binom{n}{r}$ と表記すると $P_k = p^k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+j-1}{j} q^j$

$$\begin{aligned}\frac{P_k - P_{k+1}}{p^k} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+j-1}{j} q^j - p \sum_{j=0}^k \binom{k+j}{j} q^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+j-1}{j} q^j - (1-q) \sum_{j=0}^k \binom{k+j}{j} q^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \binom{k+j-1}{j} - \binom{k+j}{j} \right\} q^j \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \binom{k+j}{j} q^{j+1} - \binom{2k}{k} q^k \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \binom{k+j-1}{j} - \binom{k+j}{j} \right\} q^j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+j-1}{j-1} q^j - \binom{2k}{k} q^k \\ &= - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1+j}{j-1} q^j + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+j-1}{j-1} q^j - \binom{2k}{k} q^k \\ &= \binom{2k-1}{k-1} q^k + \binom{2k}{k} q^{k+1} - \binom{2k}{k} q^k \\ &= \frac{1}{2} \binom{2k}{k} q^k + \binom{2k}{k} q^{k+1} - \binom{2k}{k} q^k \\ &= \left(q - \frac{1}{2} \right) \binom{2k}{k} q^k > 0 \quad \left(\frac{1}{2} < q < 1 \text{ のとき} \right)\end{aligned}$$

■