平成 23 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す．たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である．

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ．

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする．$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の 3 つの条件を考える．

(i) $a+d=ad-bc=0$
(ii) $A^2=O$
(iii) ある自然数 n に対して $A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) (i) ならば (ii) であることを示せ．

(2) (iii) ならば $ad-bc=0$ であることを示せ．

(3) (iii) ならば (i) であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする．3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a，b，c の満たす条件を求めよ．

$\boxed{4}$ n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする．1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する．これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく．たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている．これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する．1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す．同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する．このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) s_n を求めよ．

(3) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(4) a_n を求めよ．

$\boxed{5}$ $0 < a < 2\pi$ とする．$0 < x < 2\pi$ に対して $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta$ と定める．

(1) $F'(x)$ を求めよ．

(2) $F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

解答例

1 (1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ より $\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\quad\cdots(*)$

このとき $-1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}<\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<\dfrac{1-\sqrt{4}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+\sqrt{4}}{2}<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}<\dfrac{1+\sqrt{9}}{2}=2$$

よって，$(*)$ を満たす自然数 n は **0，1**

別解 $f(n)=n^2-n-\dfrac{5}{4}=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$ とおくと

$f(0)=f(1)=-\dfrac{5}{4}<0$，$f(-1)=f(2)=\dfrac{3}{4}>0$

$f(n)<0$ を満たす自然数 n は **0，1**

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ について，(1) の結果を利用して $[x]=0,\ 1$

ゆえに $[x]=0$ のとき $0\leqq x<1$， $[x]=1$ のとき $1\leqq x<2$

よって $\boldsymbol{0\leqq x<2}$

(3) (2) の結果から，$0\leqq x<2$ における方程式 $x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ の解を求める．

(i) $0\leqq x<1$ のとき，$[x]=0$ であるから

$$x^2-\dfrac{5}{4}=0 \quad ゆえに \quad x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$$

$0\leqq x<1$ より，解なし．

(ii) $1\leqq x<2$ のとき，$[x]=1$ であるから

$$x^2-\dfrac{9}{4}=0 \quad ゆえに \quad x=\pm\dfrac{3}{2}$$

$1\leqq x<2$ より，$x=\dfrac{3}{2}$

よって $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$

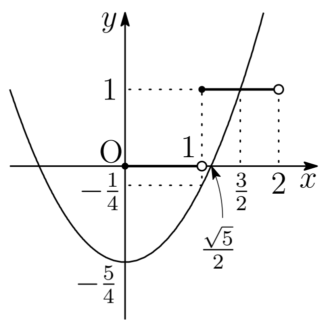
補足 $x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=$ の解は $(0\leqq x<2)$

$x^2-\dfrac{5}{4}=[x]$ より

$$y=x^2-\dfrac{5}{4},\quad y=[x]$$

のグラフの交点の x 座標である．

なお，$x^2-\dfrac{5}{4}=[x]$ の解は $x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ ■



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) ハミルトン・ケーリーの定理により　$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$

$a+d = ad-bc = 0$ を上式に代入すると　$A^2 = O$

よって，(i) ならば (ii) である．

(2) $ad-bc \neq 0$ と仮定すると，A^{-1} が存在し，$A^n = O$ の両辺に $(A-1)^n$ をかけると，$E = O$ となり，不適．よって，(iii) ならば $ad-bc = 0$ である．

別証 $A^n = O$ より $|A^n| = |A|^n = 0$　ゆえに　$|A| = ad-bc = 0$

よって，(iii) ならば $ad-bc = 0$

(3) (2) の結果およびハミルトン・ケーリーの定理から　$A^2 = (a+d)A$

したがって　$A^n = (a+d)^{n-1}A = O$

ゆえに　$a+d = 0$　または　$A = O$

$A = O$ のとき，$a+d = 0$ であるから，(iii) ならば (i) である．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 原点 O を通る円の方程式は　　$x^2+y^2+ax+by = 0$

これが 2 点 A(2, 1)，B(1, 2) を通るから

$$2a+b+5 = 0,\quad a+2b+5 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = b = -\frac{5}{3}$$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y = 0}$

(2) (1) の結果から　$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{18}$

3 点 O(0, 0, 0)，A′(2, 1, 0)，B′(1, 2, 0) を通る円 S の中心 C(a, b, c) について，上式から

$$\boldsymbol{a = \frac{5}{6},\ b = \frac{5}{6}},\quad S \text{ の半径は} \quad \sqrt{c^2+\frac{25}{18}}$$

したがって　$S:\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2 = c^2+\dfrac{25}{18}$

S 上に点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ があるから

$$2\left(t+\frac{7}{6}\right)^2+(t-c)^2 = c^2+\frac{25}{18} \quad \text{ゆえに} \quad 9t^2-2(3c-7)t+4 = 0$$

上の第 2 式の t に関する 2 次方程式は，実数解をもつから

$$D/4 = (3c-7)^2-9{\cdot}4 \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c \leqq \frac{1}{3},\ \ \frac{13}{3} \leqq c}$$

■

$\boxed{4}$ (1) a_2 は1番目の箱の中にある q 個の白玉から1個取り出し，2番目の箱の中に入れる場合の総数であるから

$$\boldsymbol{a_2 = q}$$

a_3 は，1番目の箱から2番目の箱，さらに2番目の箱から3番目の箱に1個ずつ玉を移す2回の操作のうち，1回目は白玉または赤玉を移し，2回目は白玉が移る場合の総数である．

1回目が白玉の場合の総数は　$q(q+1)$

1回目が赤玉の場合の総数は　rq

よって　　$a_3 = q(q+1) + rq = \boldsymbol{q(q+r+1)}$

(2) 1番目の箱から2番目の箱に玉を移す場合は $q+r$ 通りある．2番目の箱から3番目の箱，$\cdots$，$n-1$ 番目の箱から n 番目の箱に移す場合は，それぞれ $q+r+1$ 通りあるから

$$\boldsymbol{s_n = (q+r)(q+r+1)^{n-2}}$$

(3) n 番目の箱の赤玉が $r+1$ 個であるような再配分の総数を b_n とすると，次が成り立つ．

$$(*)\begin{cases} a_n + b_n = s_n, \\ a_{n+1} = (q+1)a_n + qb_n, \\ b_{n+1} = ra_n + (r+1)b_n \end{cases}$$

$(*)$ の第1式および第2式から

$$a_{n+1} - a_n = q(a_n + b_n) = qs_n$$

これに (2) の結果を代入すると

$$a_{n+1} - a_n = \boldsymbol{q(q+r)(q+r+1)^{n-2}}$$

(4) (1)，(3) の結果から，$n \geqq 3$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n-1}\{a_{k+1} - a_k\} = \sum_{k=2}^{n-1} q(q+r)(q+r+1)^{k-2}$$

$$a_n - a_2 = q(q+r)\cdot\frac{(q+r+1)^{n-2} - 1}{(q+r+1) - 1}$$

$$= q\{(q+r+1)^{n-2} - 1\}$$

したがって　　$a_n = q(q+r+1)^{n-2}$

これは，$n = 2$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = q(q+r+1)^{n-2}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ より

$$\begin{aligned}F'(x)&=\sqrt{1-\cos(x+a)}\cdot(x+a)'-\sqrt{1-\cos x}\\&=\boldsymbol{\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\{1-\cos(x+a)\}-(1-\cos x)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\cos x-\cos(x+a)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}\\&=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}\end{aligned}$$

$0<a<2\pi$，$0<x<2\pi$ より

$$\frac{a}{2}<x+\frac{a}{2}<2\pi+\frac{a}{2}\qquad\left(0<\frac{a}{2}<\pi,\quad 2\pi<2\pi+\frac{a}{2}<3\pi\right)$$

であるから，$F'(x)\leqq 0$ となる x の値の範囲は

$$\pi\leqq x+\frac{a}{2}\leqq 2\pi\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{\pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}}$$

(3) (2) の結果から，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	(2π)
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

したがって，極大値は

$$\begin{aligned}F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)&=\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta\\&=\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=2\sqrt{2}\Big[-\cos\frac{\theta}{2}\Big]_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\\&=2\sqrt{2}\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}}\end{aligned}$$

極小値は

$$
\begin{aligned}
F\left(2\pi - \frac{a}{2}\right) &= \sqrt{2}\int_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi+\frac{a}{2}} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta - \sqrt{2}\int_{2\pi}^{2\pi+\frac{a}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi} + 2\sqrt{2}\left[\ \cos\frac{\theta}{2}\right]_{2\pi}^{2\pi+\frac{a}{2}} \\
&= 2\sqrt{2}\left\{1+\cos\left(\pi - \frac{a}{4}\right)\right\} + 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pi + \frac{a}{4}\right) + 1\right\} \\
&= \boldsymbol{4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

■