平成23年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医(医・保健(理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

1 実数xに対して$k \leqq x < k+1$を満たす整数kを$[x]$で表す．たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$である．

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$を満たす整数nをすべて求めよ．

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$を満たす実数xの範囲を求めよ．

(3) xは(2)で求めた範囲にあるものとする．$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$を満たすxをすべて求めよ．

2 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について，以下の3つの条件を考える．

(i) $a+d=ad-bc=0$

(ii) $A^2=O$

(iii) ある自然数nに対して$A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) (i)ならば(ii)であることを示せ．

(2) (iii)ならば$ad-bc=0$であることを示せ．

(3) (iii)ならば(i)であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) xy平面上の3点O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 1)$，B$(1,\ 2)$を通る円の方程式を求めよ．

(2) tが実数全体を動くとき，xyz空間内の点$(t+2,\ t+2,\ t)$がつくる直線をlとする．3点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$'(2,\ 1,\ 0)$，B$'(1,\ 2,\ 0)$を通り，中心をC$(a,\ b,\ c)$とする球面Sが直線lと共有点をもつとき，a，b，cの満たす条件を求めよ．

$\boxed{4}$ n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする．1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する．これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく．たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている．これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する．1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す．同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する．このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) s_n を求めよ．

(3) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ．

(4) a_n を求めよ．

$\boxed{5}$ $0<a<2\pi$ とする．$0<x<2\pi$ に対して $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める．

(1) $F'(x)$ を求めよ．

(2) $F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

解答例

1 (1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ より $\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ $\cdots(*)$

このとき $-1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}<\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<\dfrac{1-\sqrt{4}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}=\frac{1+\sqrt{4}}{2}<\frac{1+\sqrt{6}}{2}<\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$$

よって，$(*)$ を満たす自然数 n は **0，1**

別解 $f(n)=n^2-n-\dfrac{5}{4}=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$ とおくと

$f(0)=f(1)=-\dfrac{5}{4}<0$，$f(-1)=f(2)=\dfrac{3}{4}>0$

$f(n)<0$ を満たす自然数 n は **0，1**

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ について，(1) の結果を利用して $[x]=0,\ 1$

ゆえに $[x]=0$ のとき $0\leqq x<1$，　$[x]=1$ のとき $1\leqq x<2$

よって $\boldsymbol{0\leqq x<2}$

(3) (2) の結果から，$0\leqq x<2$ における方程式 $x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ の解を求める．

(i) $0\leqq x<1$ のとき，$[x]=0$ であるから

$$x^2-\frac{5}{4}=0 \quad ゆえに \quad x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$0\leqq x<1$ より，解なし．

(ii) $1\leqq x<2$ のとき，$[x]=1$ であるから

$$x^2-\frac{9}{4}=0 \quad ゆえに \quad x=\pm\frac{3}{2}$$

$1\leqq x<2$ より，$x=\dfrac{3}{2}$

よって $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$

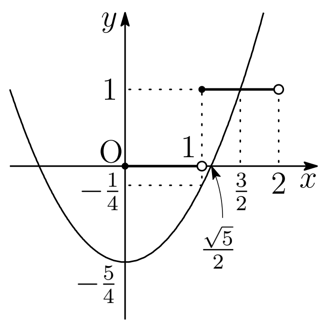
補足 $x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=$ の解は $(0\leqq x<2)$

$x^2-\dfrac{5}{4}=[x]$ より

$$y=x^2-\frac{5}{4},\quad y=[x]$$

のグラフの交点の x 座標である．

なお，$x^2-\dfrac{5}{4}=[x]$ の解は $x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ ■



2 (1) ハミルトン・ケーリーの定理により　$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$

$a+d=ad-bc=0$ を上式に代入すると　$A^2=O$

よって，(i) ならば (ii) である．

(2) $ad-bc\neq 0$ と仮定すると，A^{-1} が存在し，$A^n=O$ の両辺に $(A-1)^n$ をかけると，$E=O$ となり，不適．よって，(iii) ならば $ad-bc=0$ である．

別証 $A^n=O$ より $|A^n|=|A|^n=0$　ゆえに　$|A|=ad-bc=0$

よって，(iii) ならば $ad-bc=0$

(3) (2) の結果およびハミルトン・ケーリーの定理から　$A^2=(a+d)A$

したがって　$A^n=(a+d)^{n-1}A=O$

ゆえに　$a+d=0$　または　$A=O$

$A=O$ のとき，$a+d=0$ であるから，(iii) ならば (i) である．■

3 (1) 原点 O を通る円の方程式は　$x^2+y^2+ax+by=0$

これが 2 点 A(2, 1)，B(1, 2) を通るから

$$2a+b+5=0,\quad a+2b+5=0\quad \text{ゆえに}\quad a=b=-\frac{5}{3}$$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0}$

(2) (1) の結果から　$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$

3 点 O(0, 0, 0)，A$'$(2, 1, 0)，B$'$(1, 2, 0) を通る円 S の中心 C$(a,\ b,\ c)$ について，上式から

$$\boldsymbol{a=\frac{5}{6},\ b=\frac{5}{6}},\quad S\text{の半径は}\quad \sqrt{c^2+\frac{25}{18}}$$

したがって　$S:\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\frac{25}{18}$

S 上に点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ があるから

$$2\left(t+\frac{7}{6}\right)^2+(t-c)^2=c^2+\frac{25}{18}\quad \text{ゆえに}\quad 9t^2-2(3c-7)t+4=0$$

上の第 2 式の t に関する 2 次方程式は，実数解をもつから

$$D/4=(3c-7)^2-9\cdot 4\geqq 0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{c\leqq\frac{1}{3},\ \ \frac{13}{3}\leqq c}$$

■

$\boxed{4}$ (1) a_2 は 1 番目の箱の中にある q 個の白玉から 1 個取り出し，2 番目の箱の中に入れる場合の総数であるから

$$\boldsymbol{a_2 = q}$$

a_3 は，1 番目の箱から 2 番目の箱，さらに 2 番目の箱から 3 番目の箱に 1 個ずつ玉を移す 2 回の操作のうち，1 回目は白玉または赤玉を移し，2 回目は白玉が移る場合の総数である．

1 回目が白玉の場合の総数は　$q(q+1)$

1 回目が赤玉の場合の総数は　rq

よって　　$a_3 = q(q+1) + rq = \boldsymbol{q(q+r+1)}$

(2) 1 番目の箱から 2 番目の箱に玉を移す場合は $q+r$ 通りある．2 番目の箱から 3 番目の箱，$\cdots$，$n-1$ 番目の箱から n 番目の箱に移す場合は，それぞれ $q+r+1$ 通りあるから

$$\boldsymbol{s_n = (q+r)(q+r+1)^{n-2}}$$

(3) n 番目の箱の赤玉が $r+1$ 個であるような再配分の総数を b_n とすると，次が成り立つ．

$$(*)\begin{cases} a_n + b_n = s_n, \\ a_{n+1} = (q+1)a_n + qb_n, \\ b_{n+1} = ra_n + (r+1)b_n \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式および第 2 式から

$$a_{n+1} - a_n = q(a_n + b_n) = qs_n$$

これに (2) の結果を代入すると

$$a_{n+1} - a_n = \boldsymbol{q(q+r)(q+r+1)^{n-2}}$$

(4) (1)，(3) の結果から，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1}\{a_{k+1} - a_k\} &= \sum_{k=2}^{n-1} q(q+r)(q+r+1)^{k-2} \\ a_n - a_2 &= q(q+r)\cdot\frac{(q+r+1)^{n-2}-1}{(q+r+1)-1} \\ &= q\{(q+r+1)^{n-2} - 1\} \end{aligned}$$

したがって　　$a_n = q(q+r+1)^{n-2}$

これは，$n=2$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = q(q+r+1)^{n-2}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ より

$$\begin{aligned}F'(x)&=\sqrt{1-\cos(x+a)}\cdot(x+a)'-\sqrt{1-\cos x}\\&=\boldsymbol{\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\{1-\cos(x+a)\}-(1-\cos x)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\cos x-\cos(x+a)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}\\&=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1-\cos(x+a)}+\sqrt{1+\cos x}}\end{aligned}$$

$0<a<2\pi$，$0<x<2\pi$ より

$$\frac{a}{2}<x+\frac{a}{2}<2\pi+\frac{a}{2}\qquad\left(0<\frac{a}{2}<\pi,\quad 2\pi<2\pi+\frac{a}{2}<3\pi\right)$$

であるから，$F'(x)\leqq 0$ となる x の値の範囲は

$$\pi\leqq x+\frac{a}{2}\leqq 2\pi\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{\pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}}$$

(3) (2) の結果から，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	(2π)
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

したがって，極大値は

$$\begin{aligned}F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)&=\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta\\&=\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=2\sqrt{2}\Big[-\cos\frac{\theta}{2}\Big]_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\\&=2\sqrt{2}\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}}\end{aligned}$$

極小値は

$$
\begin{aligned}
F\left(2\pi - \frac{a}{2}\right) &= \sqrt{2}\int_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi+\frac{a}{2}} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta - \sqrt{2}\int_{2\pi}^{2\pi+\frac{a}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_{2\pi-\frac{a}{2}}^{2\pi} + 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_{2\pi}^{2\pi+\frac{a}{2}} \\
&= 2\sqrt{2}\left\{1+\cos\left(\pi - \frac{a}{4}\right)\right\} + 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pi + \frac{a}{4}\right) + 1\right\} \\
&= \boldsymbol{4\sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{a}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

■