平成22年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医(医・保健(理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 a を正の実数とし，2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える．

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 2つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = O$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列である．

(1) A は逆行列をもつことを示せ．

(2) $a + d$ と $ad - bc$ を求めよ．

(3) $b > 0$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき，A を求めよ．

3 正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して

$$a_0 = r\cos\theta, \quad b_0 = r$$

とおく．a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ．

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ．

(3) $\theta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin\theta}{\theta}$$

を示せ．

4 $0 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$f(x) = \int_0^1 e^{-|t-x|} t(1-t)\, dt$$

と定める．ただし，$e = 2.718\cdots$ は自然対数の底である．

(1) 不定積分 $I_1 = \displaystyle\int te^t\, dt$，$I_2 = \displaystyle\int t^2 e^t\, dt$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を x の指数関数と多項式を用いて表せ．

(3) $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ で極大となることを示せ．

5 2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする．

(1) n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ．

(2) A，B，C の 3 人が，A，B，C，A，B，C，A，$\cdots$ の順に，このくじ引きを行うとする．1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ．B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ．

解答例

1 (1) $C_1 : y = x^2$ より $y' = 2x$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots①$$

この接線と C_2 の方程式から y を消去すると

$$x^2 - 4ax + 4a = 2px - p^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2(2a + p)x + 4a + p^2 = 0$$

この方程式は重解 $2a + p$ をもつから，係数について

$$D/4 = (2a + p)^2 - (4a + p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(p - 1 + a) = 0$$

$a > 0$ であるから　$p = 1 - a$　これを ① に代入すると

$$\boldsymbol{\ell : y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2}$$

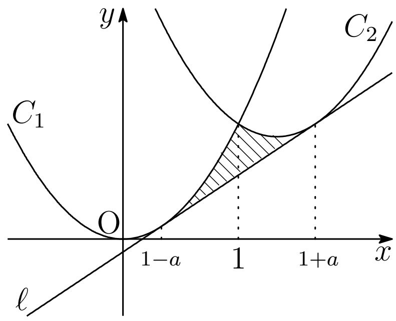
(2) C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$2a + p = 2a + (1 - a) = 1 + a$$

C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると

$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a$$

ゆえに　$a(x - 1) = 0$



$a > 0$ より，C_1 と C_2 の交点の x 座標は　1

求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-a}^{1} (x - 1 + a)^2\,dx + \int_{1}^{1+a} (x - 1 - a)^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\ (x - 1 + a)^3\ \Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\ (x - 1 - a)\ \Big]_{1}^{1+a} = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3} \end{aligned}$$

■

2 (1) $A^2 - A + E = O$ より　$A(E-A) = (E-A)A = E$

したがって　$A^{-1} = E - A$　よって，A は逆行列 $E - A$ をもつ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \cdots ①$$

A が $A^2 - A + E = O \cdots ②$ を満たすから，①，② より

$$(a+d-1)A = (ad-bc-1)E \quad \cdots ③$$

$a+d-1 \neq 0$ のとき，A は E のスカラー倍であるから，$A = kE$ とおいて (k は実数)，② に代入すると

$$(k^2 - k + 1)E = O$$

$k^2 - k + 1 = \left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0$ であるから，不適．

したがって　$a + d - 1 = 0$　これを ③ に代入して　$ad - bc - 1 = 0$

よって　$\boldsymbol{a+d=1,\ \ ad-bc=1}$

(3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ および $ad - bc = 1$ により　$A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

A の成分を比較して　$a = d$，$b = -c$

これと (1) の結果により　$a = d = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4} + b^2 = 1$

$b > 0$ であるから　$b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$c = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$　■

$\boxed{3}$ (1) $r>0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ により，$\cos\dfrac{\theta}{2^n}>0$ に注意して $(n=0,1,2,\cdots)$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{r\cos\theta+r}{2} = r\cos^2\frac{\theta}{2},\\
b_1 &= \sqrt{a_1b_0} = \sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}} = r\cos\frac{\theta}{2},\\
a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&= r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+1}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4},\\
b_2 &= \sqrt{a_2b_1} = \sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}} = r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}}$，　$\boldsymbol{\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}}$

(2) (1) の結果から，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ と推測すると $(n=0$ のときも成立する$)$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n\cos\frac{\theta}{2^n}+b_n}{2} = b_n\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2^n}+1}{2} = b_n\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}},\\
b_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{{b_n}^2\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = b_n\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$

よって，数学的帰納法により，0 以上の整数 n について

$$\boldsymbol{\frac{a_n}{b_n}=\cos\frac{\theta}{2^n}}$$

(3) $(*)$ の両辺に $\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ を掛けると　$b_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}=b_n\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$

$b_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}b_n\sin\dfrac{\theta}{2^n}$　ゆえに　$2^{n+1}b_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}=2^nb_n\sin\dfrac{\theta}{2^n}$

したがって　$2^nb_n\sin\dfrac{\theta}{2^n}=2^0b_0\sin\dfrac{\theta}{2^0}$　すなわち　$b_n=\dfrac{r\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2^n}{\theta}\sin\frac{\theta}{2^n}}\cdot\frac{r\sin\theta}{\theta}=\boldsymbol{\frac{r\sin\theta}{\theta}}$

(2) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot1=\boldsymbol{\frac{r\sin\theta}{\theta}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) C_1，C_2 は積分定数とする．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int te^t\,dt = e^t\{t-(t)'\}+C_1 \\ &= \boldsymbol{e^t(t-1)+C_1} \\ I_2 &= \int t^2e^t\,dt = e^t\{t^2-(t^2)'+(t^2)''\}+C_2 \\ &= \boldsymbol{e^t(t^2-2t+2)+C_2} \end{aligned}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int a^{px+q}f(x)\,dx = \frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p\log a}+\frac{f''(x)}{(p\log a)^2}-\frac{f'''(x)}{(p\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^x f(x)\,dx = e^x\left\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\left\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\right\}+C$$

(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{t-x}(t-t^2)\,dt + \int_x^1 e^{-t+x}(t-t^2)\,dt \\ &= \Big[\, e^{t-x}\{(t-t^2)-(t-t^2)'+(t-t^2)''\}\,\Big]_0^x \\ &\qquad -\Big[\, e^{-t+x}\{(t-t^2)+(t-t^2)'+(t-t^2)''\}\,\Big]_x^1 \\ &= \Big[\, e^{t-x}(-t^2+3t-3)\,\Big]_0^x - \Big[\, e^{-t+x}(-t^2-t-1)\}\,\Big]_x^1 \\ &= \boldsymbol{3e^{-x}+3e^{x-1}-2x^2+2x-4} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\quad f'(x) = -3e^{-x}+3e^{x-1}-4x+2$

$$f''(x) = 3e^{-x}+3e^{x-1}-4$$

このとき $\quad f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\quad f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=6e^{-\frac{1}{2}}-4=\dfrac{4}{\sqrt{e}}\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{e}\right)$

$$=\frac{4}{\sqrt{e}}\left(\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{e}\right)<0$$

よって，$f(x)$ は $\dfrac{1}{2}$ で極大となる． ■

$\boxed{5}$ (1) 1 回目から $n-1$ 回目まではずれで，n 回目に当たる確率であるから

$$\frac{100}{102}\cdot\frac{99}{101}\cdots\frac{102-n}{104-n}\cdot\frac{2}{103-n}=\frac{(102-n)\cdot 2}{102\cdot 101}=\boldsymbol{\frac{102-n}{5151}}$$

(2) A が 1 本目に当たりくじを引くのは，$n=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,100$ のときである．(1) の結果から，$n=3k-2\ (k=1,2,\cdots,34)$ とおいて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{34}\frac{102-(3k-2)}{5151}&=\frac{1}{5151}\sum_{k=1}^{34}\{3(35-k)-1\}\\&=\frac{1}{3\cdot 17\cdot 101}\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-34\right)=\boldsymbol{\frac{103}{303}}\end{aligned}$$

B が 1 本目に当たりくじを引くのは，$n=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,101$ のときである．(1) の結果から，$n=3k-1\ (k=1,2,\cdots,34)$ とおいて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{34}\frac{102-(3k-1)}{5151}&=\frac{1}{5151}\sum_{k=1}^{34}\{3(35-k)-2\}\\&=\frac{1}{3\cdot 17\cdot 101}\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35-34\cdot 2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

C が 1 本目に当たりくじを引くのは，$n=3,\ 6,\ 9,\ \cdots,99$ のときである．(1) の結果から，$n=3k\ (k=1,2,\cdots,33)$ とおいて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{33}\frac{102-3k}{5151}&=\frac{1}{17\cdot 101}\sum_{k=1}^{33}(34-k)\\&=\frac{1}{17\cdot 101}\frac{1}{2}\cdot 33\cdot 34=\boldsymbol{\frac{33}{101}}\end{aligned}$$

別解 C が 1 本目に当たりくじを引く確率は

$$1-\left(\frac{103}{303}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{33}{101}}$$

■