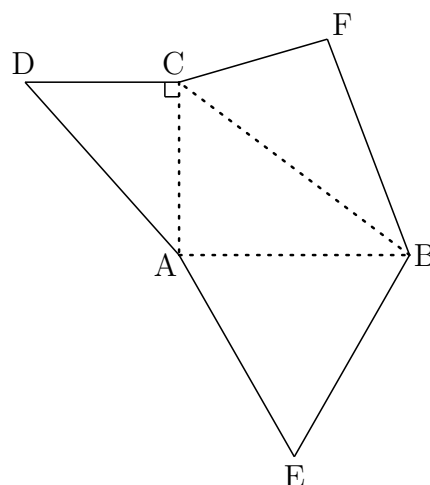


平成 21 年度 北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
理系 (理, 医 (医・保健 (理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

問題 1 2 3 4 5

- 1 図はある三角錐 V の展開図である．ここで $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$, $\angle ACD = 90^\circ$ で $\triangle ABE$ は正三角形である．このとき, V の体積を求めよ．



- 2 直角三角形 $\triangle ABC$ において $\angle B$ は直角であるとし, 辺 AC の長さを α とする．辺 AC を n 等分し, その分点を A に近い方から順に $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{n-1}$ とおく． $1 \leq k \leq n-1$ に対し, 線分 BD_k の長さを L_k とする．以下の問いに答えよ．

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2$ を α と n で表せ．

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を α で表せ．

- 3 $t > 0$ とし, $x = t$ で表される直線を l_1 とする. $y = \frac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく. C と l_1 の共有点 $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.
- (2) l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくと, l_3 の方程式を求めよ.
- (3) l_3 は t によらない定点を通ることを示せ.
- (4) l_3 と C の2つの共有点を P, Q とする. 線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ.

- 4 $0 < a < 1, 0 < \theta < \pi$ とする. 4点 $O(0, 0), A(a, 0), P(\cos \theta, \sin \theta), Q(x, y)$ が条件

$$OQ = AQ = PQ$$

をみたすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 Q の座標を a と θ で表せ.
- (2) a を固定する. $0 < \theta < \pi$ の範囲で θ が動くとき, y の最小値を求めよ.

- 5 自然数 n に対して

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n} dx$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a_1 を求めよ.
- (2) a_{n+1} を a_n で表せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ.

解答例

- 1 $\angle BAC = 90^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ を底面とし, V の高さを h とする.
頂点 E(D, F) から辺 AB に垂線 EH を引くと

$$AH = AE \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

このとき, $AH^2 + AC^2 + h^2 = AE^2$ であるから

$$2^2 + 3^2 + h^2 = 4^2 \quad \text{これを解いて} \quad h = \sqrt{3}$$

よって, 求める V の体積は $\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

解説 直交座標空間の原点を A, x 軸上に B, y 軸上に C をとり, V の高さが z 座標となるように z 軸をとる. AE と x 軸, y 軸, z 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α , β , γ とし, $r = AE$ とすると, 点 E の座標は $(r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma)$.
また, $AE^2 = r^2$ より, 次式が成立する.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \cdots (*)$$

$\alpha = 60^\circ$, $\cos \beta = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{4}$ を (*) に代入すると $|\cos \gamma| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ を得る.

したがって, V の高さは $r |\cos \gamma| = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ ■

- 2 (1) $c = AB$ とし, $\triangle ABD_k$ に余弦定理を適用すると

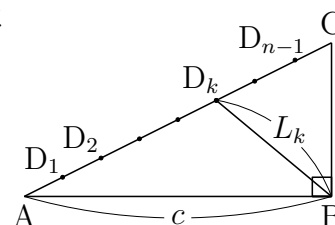
$$L_k^2 = c^2 + AD_k^2 - 2cAD_k \cos A$$

$$AD_k = \frac{k\alpha}{n}, \quad AD_k \cos A = \frac{k\alpha}{n} \cos A = \frac{kc}{n} \quad \text{より}$$

$$L_k^2 = c^2 + \frac{\alpha^2 k^2}{n^2} - \frac{2c^2 k}{n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(c^2 + \frac{\alpha^2}{n^2} k^2 - \frac{2c^2}{n} k \right) \\ &= c^2(n-1) + \frac{\alpha^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - \frac{2c^2}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{\alpha^2}{6n} (n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果により $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{\alpha^2}{3}$ ■



- 3 (1) ℓ_1 の x 軸の正の向きとなす角 (偏角) は $\frac{\pi}{2}$

$C: y = \frac{x^2}{4}$ より, $y' = \frac{x}{2}$ であるから, C 上の点 $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ における接線 ℓ_2 の傾きは $\frac{t}{2}$ であるから, その偏角を β とすると $\tan \beta = \frac{t}{2}$ ($t > 0$) したがって, ℓ_1 と ℓ_2 のなす角 θ について, $t > 0$ に注意して

$$\tan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{2}{t} \quad \left(t > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{t^2}{t^2 + 4} \quad \text{すなわち} \quad \cos \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

- (2) ℓ_3 の偏角を γ とすると $\frac{\pi}{2} + \gamma = 2\beta$ ($t > 0$ より, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan \left(2\beta - \frac{\pi}{2} \right) = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = -\frac{1}{\tan 2\beta} \\ &= \frac{\tan^2 \beta - 1}{2 \tan \beta} = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{t}{2}} = \frac{t^2 - 4}{4t} \end{aligned}$$

よって, ℓ_3 は点 $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ を通り, 傾き $\frac{t^2 - 4}{4t}$ の直線であるから

$$y - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2 - 4}{4t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{t^2 - 4}{4t}x + 1$$

- (3) (2) の結果から, $(t^2 - 4)x - 4t(y - 1) = 0$ となり, ℓ_3 は定点 $(0, 1)$ を通る

- (4) C と ℓ_3 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{4} = \frac{t^2 - 4}{4t}x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x - t)(tx + 4) = 0$$

2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_p, x_q とすると $x_p - x_q = t + \frac{4}{t}$

$$\text{また} \quad \frac{1}{\cos^2 \gamma} = 1 + \tan^2 \gamma = 1 + \left(\frac{t^2 - 4}{4t} \right)^2 = \left(\frac{t^2 + 4}{4t} \right)^2$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \frac{t}{4} + \frac{1}{t} \quad \text{となり} \quad PQ = \frac{x_p - x_q}{\cos \gamma} = \left(t + \frac{4}{t} \right) \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t} \right) = \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t^2} + 2$$

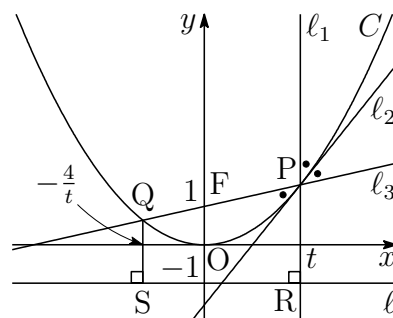
$$\text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の大小関係により} \quad \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t^2} \geq 2\sqrt{\frac{t^2}{4} \cdot \frac{4}{t^2}} = 2$$

$$\text{上式において, 等号が成立するのは} \quad \frac{t^2}{4} = \frac{4}{t^2} \quad \text{すなわち} \quad t = 2$$

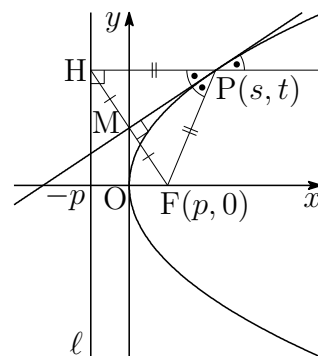
よって, PQ は, $t = 2$ のとき最小値 4 をとる.

別解 (3) で求めた定点 $F(0, 1)$ は C の焦点である．準線を $\ell: y = -1$ とし，2 点 P, Q から ℓ に垂線 PR, QS を引くと

$$\begin{aligned} PQ &= PF + QF = PR + QS \\ &= \left(\frac{t^2}{4} + 1 \right) + \left(\frac{4}{t^2} + 1 \right) \\ &= \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t^2} + 2 \end{aligned}$$



解説 放物線 $y^2 = 4px$ の焦点を F ，準線を ℓ とする． F の座標は $(p, 0)$ ， ℓ の方程式は $x = -p$ である．この放物線上の任意の点 $P(s, t)$ から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とし，線分 FH の中点を M とする．放物線の定義によると $PF = PH$ であるから，二等辺三角形 PHF において，直線 PM は頂角 $\angle FPH$ を 2 等分する．



よって，図に示した 3 つの角は等しいことがわかる．

$PM \perp FH$ と直線 FH の傾きが $-\frac{t}{2p}$ であるから，直線 PM の方程式は

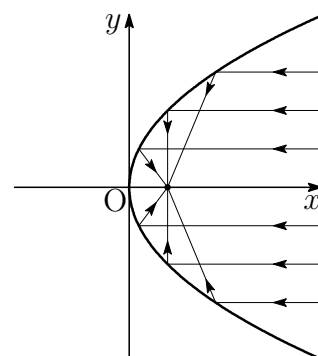
$$y - t = \frac{2p}{t}(x - s)$$

$t^2 = 4ps$ であるから，放物線上の点 P における接線の方程式は

$$ty = 2p(x + s)$$

点 M の座標は $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ であり，この接線上にあるから，直線 PM は放物線上の点 P における接線であることがわかる．

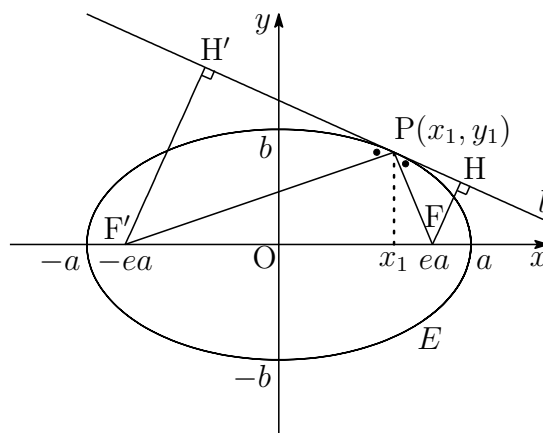
以上のことから，放物線の軸に平行に進んできた光や電波が放物線に当たって反射すると，右の図のように，そのすべてが焦点を通過する．



2次曲線の離心率を e とする¹.

楕円 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について ($a > b$),
 E 上の点を $P(x_1, y_1)$, 焦点を $F(ea, 0)$,
 $F'(-ea, 0)$, E の P における接線を l と
 する. F, F' から l にそれぞれ垂線 FH ,
 $F'H'$ を引くと, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} FP &= a - ex_1 \\ F'P &= a + ex_1 \\ \angle FPH &= \angle F'PH' \end{aligned}$$



証明

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x_1 - ea)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \\ &= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1^2 \\ &= a^2 - 2eax_1 + e^2x_1^2 = (a - ex_1)^2 \end{aligned}$$

$a > ex_1$ であるから $FP = a - ex_1$ 同様にして $F'P = a + ex_1$

$F(ea, 0), F'(-ea, 0)$ から $l: \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は, それぞれ

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{FP}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \\ F'H' &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{F'P}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \end{aligned}$$

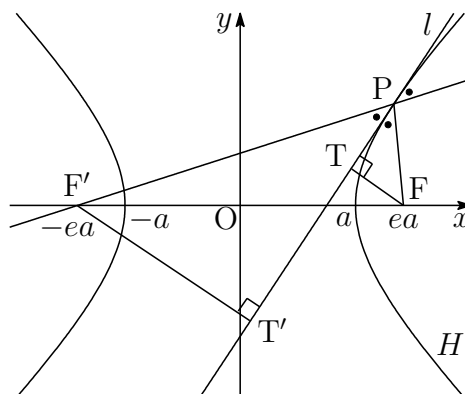
上の2式から $\frac{FH}{FP} = \frac{F'H'}{F'P}$ ゆえに $\angle FPH = \angle F'PH'$

証終

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou-jou-2010.pdf> [3] を参照

双曲線 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について, H 上の点を $P(x_1, y_1)$, 焦点を $F(ea, 0)$, $F'(-ea, 0)$, H の P における接線を l とする. F, F' から l にそれぞれ垂線 $FT, F'T'$ を引くと, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} FP &= a - ex_1 \\ F'P &= a + ex_1 \\ \angle FPT &= \angle F'PT' \end{aligned}$$



証明

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x_1 - ea)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) \\ &= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x_1^2 \\ &= a^2 - 2eax_1 + e^2x_1^2 = (a - ex_1)^2 \end{aligned}$$

したがって $FP = |a - ex_1|$ 同様にして $F'P = |a + ex_1|$

$F(ea, 0), F'(-ea, 0)$ から $l: \frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は, それぞれ

$$\begin{aligned} FT &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{|a - ex_1|}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{FP}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \\ F'T' &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{|a + ex_1|}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{F'P}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \end{aligned}$$

上の2式から $\frac{FT}{FP} = \frac{F'T'}{F'P}$ ゆえに $\angle FPT = \angle F'PT'$

証終



- 4 (1) $OQ = AQ$ より, 点 Q は 2 点 $O, A(a, 0)$ の垂直二等分線 $x = \frac{a}{2}$ 上の点
 $OP = OQ$ より, 点 Q は 2 点 $O, P(\cos \theta, \sin \theta)$ の垂直二等分線, すなわ
ち, 点 $\left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta\right)$ を通り, $\overrightarrow{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$ に垂直な直線

$$\left(x - \frac{1}{2} \cos \theta\right) \cos \theta + \left(y - \frac{1}{2} \sin \theta\right) \sin \theta = 0$$

整理すると $x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{1}{2}$

上式に $x = \frac{a}{2}$ を代入することにより $y = \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta}$

よって, 点 Q の座標は $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta}\right)$

- (2) (1) の結果から

$$f(\theta) = \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad (0 < \theta < \pi)$$

を θ について微分すると

$$f'(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cos \theta \cdot \sin \theta - (1 - a \cos \theta) \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a - \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}$$

$0 < a < 1$ より, $\cos \varphi = a$ とおくと $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin \varphi = \sqrt{1 - a^2}$

θ	(0)	$\dots$	φ	$\dots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって, 求める最小値は

$$f(\varphi) = \frac{1 - a \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - a \cdot a}{\sqrt{1 - a^2}} = \sqrt{1 - a^2}$$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \quad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x (\tan x)' \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2n+1} \tan^{2n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - a_n = \frac{1}{2n+1} - a_n \end{aligned}$$

$$(3) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ において, } 0 \leq \tan x \leq 1 \text{ であるから}$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$

上式および (2) の結果から

$$0 \leq 2a_{n+1} \leq a_{n+1} + a_n = \frac{1}{2n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_{n+1} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$(4) \quad (2) \text{ の結果より } a_{k-1} + a_k = \frac{1}{2k-1} \quad (k \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 + \sum_{k=2}^n \{(-1)^{k-1} a_{k-1} - (-1)^k a_k\} \\ &= 1 + (-1)a_1 - (-1)^n a_n = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - (-1)^n a_n \\ &= \frac{\pi}{4} - (-1)^n a_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{4} - (-1)^n a_n \right\} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{別解} \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[\frac{t^{2k-1}}{2k-1} \right]_0^1 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{2k-2} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t^2)^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2} dt
 \end{aligned}$$

$$t = \tan x \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \overline{\begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline x & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - (-\tan^2 x)^n}{1 + \tan^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\pi}{4} - (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx = \frac{\pi}{4} - (-1)^n a_n
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{4} - (-1)^n a_n \right\} = \frac{\pi}{4}$$

■