平成 20 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ α, β を $0 < \alpha < \beta < 2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$$

とする．

(1) $f(x)$ の最大値を M とする．$f(x) = M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α, β と M の値を求めよ．

(2) (1) で求めた α, β について，$f(x) - mx = 0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とし，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，A の n 乗を

$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ と表す．

(1) $a_n = d_n$ と $b_n = c_n$ を示せ．

(2) n が奇数ならば a_n は偶数であること，および，n が偶数ならば a_n は奇数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$$

とする．

(1) $0 < x < 1$ ならば，$0 < f(x) < 1$ となることを示せ．

(2) $f(x) - x = 0$ となる x をすべて求めよ．

(3) $0 < \alpha < 1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とする．α の値に応じて，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

4 xyz 空間の原点Oと，Oを中心とし半径1の球の球面上の異なる4点A，B，C，Dを考える．点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}, \sin\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), 0\right)$，$(0 < \alpha < \pi)$ とする．点C，Dは $\angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{DOA} = \angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点Cの z 座標は正，点Dの z 座標は負とする．

(1) 点Cの座標を α と $\theta = \angle\mathrm{COA}$ $(0 < \theta < \pi)$ で表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる2つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点Cの座標を求めよ．

5 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする．

(1) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} f(t)\,dt$

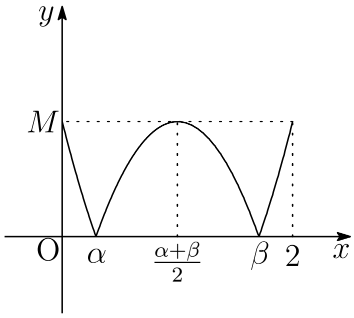
を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x) = 0$ のみであることを示せ．

(2) $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} g(t)\,dt + x$

を満たす $g(x)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 条件を満たすとき



$$M = f(0) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(2)$$

が成立するから

$$M = \alpha\beta = \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2 = (2-\alpha)(2-\beta)$$

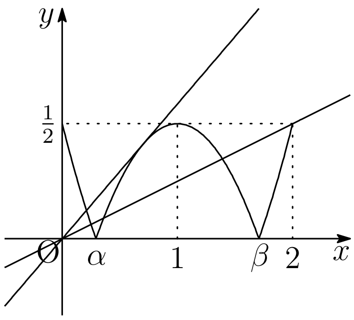
したがって　$M = \alpha\beta = \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4$

これを解いて　$\boldsymbol{M = \frac{1}{2}}$，$\alpha+\beta = 2$，$\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は　$t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$

$\alpha < \beta$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$，$\boldsymbol{\beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) 方程式 $f(x) - mx = 0$ の解の個数は，$y = f(x)$ と $y = mx$ の共有点の個数と等しい．
原点と点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る直線の傾きは　$\frac{1}{4}$
$\alpha < x < 1$ において，$y = f(x)$ と $y = mx$ が接するとき，方程式



$$-x^2 + 2x - \frac{1}{2} = mx$$

すなわち，$x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2} = 0$ は重解をもつから

$$(m-2)^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = 2 \pm \sqrt{2}$$

このとき，$\alpha < -\frac{m-2}{2} < 1$ に注意して　$m = 2 - \sqrt{2}$

よって，求める m の値の範囲は　$\boldsymbol{\frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ について，$AA^n = A^nA$ であるから

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_n + c_n & 2b_n + d_n \\ a_n + 2c_n & b_n + 2d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & a_n + 2b_n \\ 2c_n + d_n & c_n + 2d_n \end{pmatrix}$$

成分を比較することにより　$a_n = d_n$，$b_n = c_n$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ より　$a_1 = 2$，$a_2 = 5$

A にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$A^2 - 4A + 3E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^{n+2} = 4A^{n+1} - 3A^n$$

したがって　　$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

数列 $\{a_n\}$ は整数の項からなり，法 2 ついて

$$a_{n+2} \equiv 4a_{n+1} - 3a_n \equiv a_n \pmod 2$$

a_1 は偶数であるから，n が奇数のとき，a_n は偶数

a_2 は奇数であるから，n が偶数のとき，a_n は奇数　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ より，$0<x<1$ のとき

$$f(x)>0,\quad f(x)-1=\frac{x^2-1}{2x^2+1}<0 \quad \text{ゆえに}\quad 0<f(x)<1$$

(2) $f(x)-x=x\left(\dfrac{3x}{2x^2+1}-1\right)=\dfrac{x(3x-2x^2-1)}{2x^2+1}=-\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{2x^2+1}$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=0,\ \frac{1}{2},\ 1}$

(3) (1) から　$0<a_n<1$ のとき　$0<a_{n+1}<1$

(2) から　$a_{n+1}-a_n=-\dfrac{a_n(a_n-1)(2a_n-1)}{2{a_n}^2+1}$

ゆえに　$0<a_n<\dfrac{1}{2}$ のとき　$0<a_{n+1}<a_n$，

$\dfrac{1}{2}<a_n<1$ のとき　$a_n<a_{n+1}<1$

$f(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}\cdot x$，$f(x)-1=\dfrac{x+1}{2x^2+1}(x-1)$ より

$g(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+1}$ とおく $(0<x<1)$.

$0<g(x)<1$ とすると　$0<3x<2x^2+1$　ゆえに　$0<x<\dfrac{1}{2}$

$$g(\alpha)-g(x)=\frac{3\alpha}{2\alpha^2+1}-\frac{3x}{2x^2+1}=\frac{3(\alpha-x)(1-2\alpha x)}{(2\alpha^2+1)(2x^2+1)}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)-g(\alpha)=1-\frac{3\alpha}{2\alpha^2+1}=\frac{(1-2\alpha)(1-\alpha)}{2\alpha^2+1}$$

したがって　$0<x<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき　$0<g(x)<g(\alpha)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

$0<h(x)<1$ とすると　$0<x+1<2x^2+1$　ゆえに　$\dfrac{1}{2}<x<1$

$$h(\alpha)-h(x)=\frac{\alpha+1}{2\alpha^2+1}-\frac{x+1}{2x^2+1}=\frac{(x-\alpha)\{2(\alpha+1)x+(2\alpha-1)\}}{(2\alpha^2+1)(2x^2+1)}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right)-h(\alpha)=1-\frac{\alpha+1}{2\alpha^2+1}=\frac{\alpha(2\alpha-1)}{2\alpha^2+1}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}<\alpha<x<1$ のとき　$0<h(x)<h(\alpha)<h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

(i) $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき　$0<a_n<\alpha<\dfrac{1}{2}$ より　$0<g(a_n)<g(\alpha)<1$

$a_{n+1}=g(a_n)a_n$ であるから

$$a_n=\alpha\prod_{k=1}^{n-1}g(a_k)<\alpha\{g(\alpha)\}^{n-1}$$

$a_n>0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha\{g(\alpha)\}^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

(ii) $\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき　(2) の結果から　$a_n=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

(iii) $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ のとき　$\dfrac{1}{2}<\alpha<a_n<1$ より　$0<h(a_n)<h(\alpha)<1$

$1-a_{n+1}=h(a_n)(1-a_n)$ より

$$1-a_n=(1-\alpha)\prod_{k=1}^{n-1}h(a_k)<(1-\alpha)\{h(\alpha)\}^{n-1}$$

$1-a_n>0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\alpha)\{h(\alpha)\}^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0\quad\text{すなわち}\quad\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

(i)〜(iii) より　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0 & (0<\alpha<\frac{1}{2})\\ \frac{1}{2} & (\alpha=\frac{1}{2})\\ 1 & (\frac{1}{2}<\alpha<1)\end{cases}}$

補足 $g(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$　$(0<x<\frac{1}{2})$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+1}$　$(\frac{1}{2}<x<1)$ とおくと

$$g'(x)=\frac{3(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}>0$$
$$h'(x)=\frac{-2x^2-4x+1}{(2x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)^2+3}{(2x^2+1)^2}<0$$

したがって　$0<x<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき　$0<g(x)<g(\alpha)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

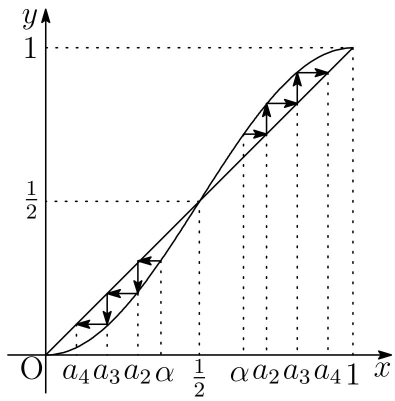
$\dfrac{1}{2}<\alpha<x<1$ のとき　$0<h(x)<h(\alpha)<h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

解説 (3) で示した

(A) $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ のとき　$0 < a_{n+1} < a_n$　($\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列)

(B) $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$ のとき　$a_n < a_{n+1} < 1$　($\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列)

このとき，$\{a_n\}$ は収束することが知られている．$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフで示すと，a_n の収束する様子が分かる．$a_{n+1} = f(a_n)$ より



$$a_{n+1} = \frac{3{a_n}^2}{2{a_n}^2 + 1}$$

その極限値を c とすると

$$c = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

であるから

$$c = \frac{3c^2}{2c^2 + 1} \quad \text{ゆえに} \quad c(2c-1)(c-1) = 0$$

よって　　$0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ のとき，(A) より　$c = 0$

$\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ のとき，(B) より　$c = 1$

$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(\alpha) = \alpha$ より　$c = \dfrac{1}{2}$　■

$\boxed{4}$ (1) $p=\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$q=\sin\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと $(0<\alpha<\pi)$

$$0<p<1,\quad 0<q<1,\quad p^2+q^2=1\quad\cdots(*)$$

$\mathrm{A}(p,\ q,\ 0)$，$\mathrm{B}(p,-q,\ 0)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とすると $(c_3>0)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\theta$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta\qquad\text{ゆえに}\qquad pc_1+qc_2=\cos\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta\qquad\text{ゆえに}\qquad pc_1-qc_2=\cos\theta$$

上の 2 式から $\quad c_2=0,\quad c_1=\dfrac{\cos\theta}{p}\quad\cdots$①

これを $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2={c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2=1$ に代入して

$$\frac{\cos^2\theta}{p^2}+{c_3}^2=1\quad c_3>0\text{ より}\quad c_3=\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{p^2}}$$

よって $\qquad \mathbf{C}\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$

(2) C と D は xy 平面に関して対称であるから，$\mathrm{C}(c_1,\ 0,\ c_3)$，$\mathrm{D}(c_1,\ 0,-c_3)$ とおくと，$\angle\mathrm{COD}=\theta=\alpha$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\theta\quad\text{ゆえに}\quad {c_1}^2-{c_3}^2=\cos\theta$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2={c_1}^2+{c_3}^2=1\cdots$② であるから $\qquad 2{c_1}^2=\cos\theta+1\quad\cdots$③

このとき，$\cos\theta=\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=2p^2-1$ であるから，① より

$$c_1=\frac{\cos\theta}{p}=\frac{2p^2-1}{p}\quad\cdots①'$$

①$'$ を ③ に代入すると

$$2\left(\frac{2p^2-1}{p}\right)^2=(2p^2-1)+1\quad\text{ゆえに}\quad(p^2-1)(3p^2-1)=0$$

$0<p<1$ に注意して $\quad p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad$ これを ①$'$ に代入して $\quad c_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

さらに ② に代入して $\quad\dfrac{1}{3}+{c_3}^2=1\quad c_3>0$ に注意して $\quad c_3=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

よって $\qquad \mathbf{C}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} f(t)\,dt = e^x \int_0^1 e^t f(t)\,dt$

$A = \displaystyle\int_0^1 e^t f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x) = Ae^x$

$$A = \int_0^1 e^t (Ae^t)\,dt = A\int_0^1 e^{2t}\,dt = \frac{A}{2}\Big[\,e^{2t}\,\Big]_0^1 = \frac{A}{2}(e^2-1)$$

整理すると　$(e^2-3)A = 0$　ゆえに　$A = 0$　　よって　$f(x) = 0$

(2) $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} g(t)\,dt + x = e^x \int_0^1 e^t g(t)\,dt + x$

$B = \displaystyle\int_0^1 e^t g(t)\,dt$ とおくと　　$f(x) = Be^x + x$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 e^t(Be^t + t)\,dt = B\int_0^1 e^{2t}\,dt + \int_0^1 te^t\,dt \\ &= \frac{B}{2}\Big[\,e^{2t}\,\Big]_0^1 + \Big[\,(t-1)e^t\,\Big]_0^1 = \frac{B}{2}(e^2-1) + 1 \end{aligned}$$

整理すると　$(e^2-3)B + 2 = 0$　ゆえに　$B = -\dfrac{2}{e^2-3}$

よって　$\boldsymbol{g(x) = -\dfrac{2}{e^2-3}e^x + x}$　■