平成19年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理，医(医・保健(理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える．

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ．

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ．

2 4枚のカードがあって，1から4までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ とする．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,2,3,4$ とする．

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)\ (j=3,4)$ を $A_{n-1}(1),\ A_{n-1}(2),\ \cdots,\ A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3),\ A_n(4)$ を求めよ．

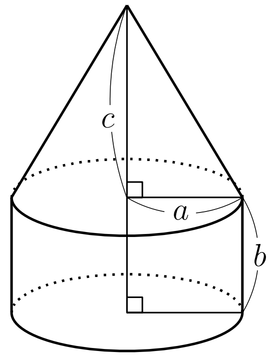
(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

3 xy 平面上の曲線 $y=xe^x$ と x 軸および2直線 $x=n$，$x=n+1$ で囲まれる図形を D_n とする．ただし，n を自然数とする．

(1) 図形 D_n の面積を S_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ．

(2) 図形 D_n を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ．

4 図のような，半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に，同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐(すい)の屋根をのせてできる建物を考える．



(1) V をこの建物の体積，S をこの建物の外側の表面積 (底面は除く) とする．V と S を a，b，c で表せ．

(2) V を一定に保ちながら a，b，c を動かして，S を最小にしたい．

(i) $b = xa$，$c = ya$ とおき，V と a を一定としたとき，S の最小値 T を V と a で表せ．

(ii) T が最小となるときの比 $a : b : c$ を求めよ．

5 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える．C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば，C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ．

解答例

1 (1) $C : x^2+y^2-4y+2=0$ の中心を M，半径を r とすると　$\mathrm{M}(0,\ 2)$，$r=\sqrt{2}$

2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ を通る円の中心を B，半径を R とすると，B は線分 OA の垂直二等分線上にあるから，実数 t を用いて

$$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ t\right),\quad R=\mathrm{OB}=\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}$$

このとき，$\mathrm{MB}=|R\pm r|$ であるから，$\mathrm{MB}^2=R^2+r^2\pm 2rR$ より

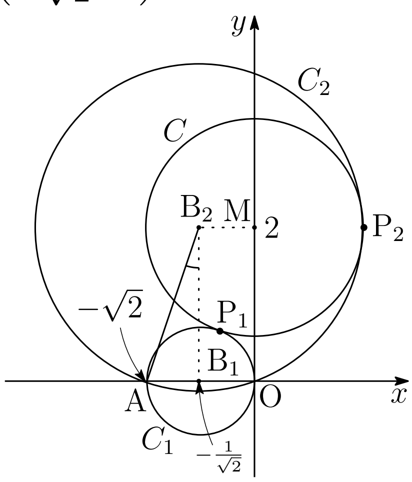
$$\frac{1}{2}+(t-2)^2=\left(\frac{1}{2}+t^2\right)+2\pm 2\sqrt{1+2t^2}$$

整理すると　　$-2t+1=\pm\sqrt{1+2t^2}$

したがって　　$(-2t+1)^2=1+2t^2$　　ゆえに　$t(t-2)=0$

よって，求める座標は　　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)}$，　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2\right)}$

(2) C と外接する円を C_1，内接する円を C_2 とする．C_1，C_2 の中心をそれぞれ B_1，B_2 とし，C と C_1，C_2 との接点をそれぞれ P_1，P_2 とする．(1) の結果から



$$\mathrm{B}_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\quad \mathrm{B}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2\right)$$

点 P は円 C_1 の外部 (境界を含む) にあるから

$$\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AP_1O}=\frac{\pi}{2}$$

同時に，点 P は円 C_2 の内部 (境界を含む) にあるから　$\angle\mathrm{APO}\geqq\angle\mathrm{AP_2O}$

したがって　　$\angle\mathrm{AP_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AP_1O}$

$$\cos\angle\mathrm{AP_2O}\geqq\cos\angle\mathrm{APO}\geqq\cos\frac{\pi}{2}$$

$\angle\mathrm{AP_2O}=\angle\mathrm{AB_2B_1}$，$\cos\angle\mathrm{AB_2B_1}=\dfrac{\mathrm{B_1B_2}}{\mathrm{AB_2}}=\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$0\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\frac{2\sqrt{2}}{3}$$　よって　最大値 $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，最小値 $\mathbf{0}$　■

$\boxed{2}$ (1) (i) $A_n(1)$ であるのは，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 \quad \text{よって} \quad A_n(1) = 1$$

$A_n(2)$ であるのは，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq 2,\quad a_n = 2$$

1, 2 の 2 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$A_n(2) = {}_2\mathrm{H}_{n-1} = {}_{2+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 = \boldsymbol{n}$$

(ii) $A_n(3)$ は，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j$，$a_n = 3$ $(j = 1, 2, 3)$ より

$$\boldsymbol{A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)}$$

$A_n(4)$ は，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j$，$a_n = 4$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ より

$$\boldsymbol{A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4)}$$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j$ の場合の数は，j 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$A_n(j) = {}_j\mathrm{H}_{n-1} = {}_{j+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+j-2}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+j-2}\mathrm{C}_{j-1}$$

したがって
$$A_n(3) = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$
$$A_n(4) = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

(2) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 4$ である場合の数は，1，2，3，4 の 4 個から n 個取り出す重複組合せの総数であるから

$${}_4\mathrm{H}_n = {}_{4+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+3}\mathrm{C}_n = {}_{n+3}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+2)$$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 4$ である確率を p_n とすると

$$p_n = \frac{{}_4\mathrm{H}_n}{4^n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6{\cdot}4^n}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} p_{n-1} - p_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6{\cdot}4^{n-1}} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6{\cdot}4^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2{\cdot}4^n}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $S_n = \displaystyle\int_n^{n+1} xe^x\,dx = \Big[\, e^x(x-1) \,\Big]_n^{n+1} = e^n(ne-n+1)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n(ne-n+1)}{ne^n} = \lim_{n\to\infty}\left(e-1+\frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{e-1}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi} &= \int_n^{n+1}(xe^x)^2\,dx = \left[\,\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\,\right]_n^{n+1}\\ &= \frac{e^{2n+2}}{2}\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right) - \frac{e^{2n}}{2}\left(n^2-n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{\pi(ne^n)^2} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{e^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\right\}\\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2} = \frac{(e+1)(e-1)}{2}\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2} &= \frac{V_n}{\pi(ne^n)^2}\left(\frac{ne^n}{S_n}\right)^2\pi\\ &= \frac{(e+1)(e-1)}{2}\left(\frac{1}{e-1}\right)^2\pi = \boldsymbol{\frac{\pi(e+1)}{2(e-1)}}\end{aligned}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int a^{px+q}f(x)\,dx = \frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p\log a}+\frac{f''(x)}{(p\log a)^2}-\frac{f'''(x)}{(p\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^x f(x)\,dx = e^x\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$

$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\boldsymbol{V = \pi a^2 b + \frac{1}{3}\pi a^2 c,}$ $\quad S = 2\pi ab + \frac{1}{2}\cdot 2\pi a\sqrt{a^2+c^2}$

$$= \boldsymbol{2\pi ab + \pi a\sqrt{a^2+c^2}}$$

(2) (i) (1) の結果に $b = xa$，$c = ya$ を代入することにより

$$(*) \quad \frac{V}{\pi a^3} = x + \frac{y}{3}, \quad \frac{S}{\pi a^2} = 2x + \sqrt{1+y^2}$$

上の 2 式から x を消去すると

$$(**) \quad \frac{S}{\pi a^2} = \frac{2V}{\pi a^3} - \frac{2y}{3} + \sqrt{1+y^2}$$

$(*)$ の第 1 式に注意して，関数

$$f(y) = -\frac{2y}{3} + \sqrt{1+y^2} \qquad \left(0 < y < \frac{3V}{\pi a^3}\right)$$

の最小値を求める．

$$f'(y) = -\frac{2}{3} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{3y - 2\sqrt{1+y^2}}{3\sqrt{1+y^2}}$$
$$= \frac{5y^2-4}{2\sqrt{1+y^2}(3y+2\sqrt{1+y^2})}$$

$\frac{3V}{\pi a^3} < \frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，$0 < y < \frac{3V}{\pi a^3}$ で $f(y)$ は単調減少により最小値なし．

$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqq \frac{3V}{\pi a^3}$ のとき，$f(y)$ の最小値は $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$(**)$ より $\quad \frac{T}{\pi a^2} = \frac{2V}{\pi a^3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{T = \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}}$

(ii) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$T = \frac{V}{a} + \frac{V}{a} + \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3} \geqq \sqrt[3]{\left(\frac{V}{a}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}\pi V^2}{3}}$$

等号が成立するのは $\quad \frac{V}{a} = \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3} \quad$ すなわち $\quad \frac{3V}{\pi a^3} = \sqrt{5} > \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{V}{\pi a^3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ および $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を $(*)$ の第 1 式に代入して $\quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

よって $\quad a : b : c = 1 : x : y = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\sqrt{5} : 1 : 2}$ ■

5 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$，$C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，C_2 の焦点は　$(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

C_1 の焦点がこれと一致するから，C_1 の焦点は　$(\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2},\ 0)$

C_1 と C_2 の焦点が一致するから

$$a^2+b^2=\alpha^2-\beta^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2-\alpha^2=-(b^2+\beta^2) \qquad \cdots(*)$$

C_1，C_2 の交点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると

$$\frac{s^2}{\alpha^2}+\frac{t^2}{\beta^2}=1, \quad \frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{a^2}\right)s^2+\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{b^2}\right)t^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a^2-\alpha^2}{\alpha^2a^2}s^2+\frac{b^2+\beta^2}{\beta^2b^2}t^2=0$$

$(*)$ により　$$\frac{s^2}{\alpha^2a^2}-\frac{t^2}{\beta^2b^2}=0 \qquad \cdots(**)$$

C_1 および C_2 の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線をそれぞれ $l_1,\ l_2$ とすると

$$l_1 : \frac{sx}{\alpha^2}+\frac{ty}{\beta^2}=1, \quad l_2 : \frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1$$

C_1 および C_2 の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における法線ベクトルを $\vec{n}_1,\ \vec{n}_2$ とすると

$$\vec{n}_1=\left(\frac{s}{\alpha^2},\ \frac{t}{\beta^2}\right), \quad \vec{n}_2=\left(\frac{s}{a^2},-\frac{t}{b^2}\right)$$

$(**)$ より　$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$　ゆえに　$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

よって，C_1 と C_2 の交点 P でそれぞれの接線は直交する．

補足 C_1 を x で微分すると　$\dfrac{2x}{\alpha^2}+\dfrac{2y}{\beta^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\beta^2x}{\alpha^2y}$

C_2 を x で微分すると　$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

C_1，C_2 の点 P における接線の傾きをそれぞれ $m_1,\ m_2$ とすると

$$m_1=-\frac{\beta^2s}{\alpha^2t}, \quad m_2=\frac{b^2s}{a^2t} \quad (**)\text{より} \quad m_1m_2=-\frac{\beta^2b^2s^2}{\alpha^2a^2t^2}=-1$$

■