平成 15 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理系 (理，医 (医・保健 (理学・放射線・検査))，歯，獣医，水産)

問題 1 2 3 4 5

1 xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$，$B : y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする．

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ．

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ．

2 z を複素数とし，i を虚数単位とする．

(1) $\dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ．

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

3 曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす．この容器の底に排水口がある．時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする．V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる．

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ．

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ．

4 点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする．n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す．

(1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ．

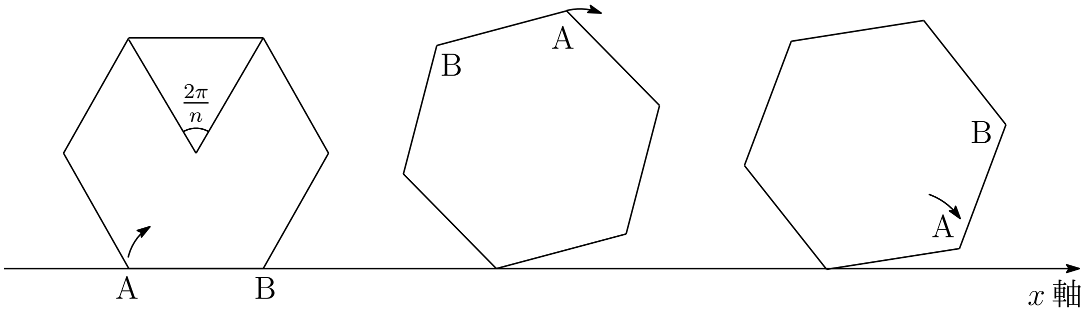
(2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ．

(3) P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある．ひとつの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける．点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする．

(1) $L(6)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ．



図は $n = 6$ の場合

解答例

$\boxed{1}$ (1) $A : y = x^2$，$B : y = -(x-a)^2 + b$ の 2 式から，y を消去すると

$$x^2 = -(x-a)^2 + b \quad \text{整理すると} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

上の第 2 式の解が x_1，x_2 であるから，解と係数の関係から

$$x_1 + x_1 = a, \quad x_1x_2 = \frac{a^2 - b}{2} \tag{$*$}$$

したがって
$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= a^2 - 4\cdot\frac{a^2 - b}{2} \\ &= -a^2 + 2b \quad \cdots ①\end{aligned}$$

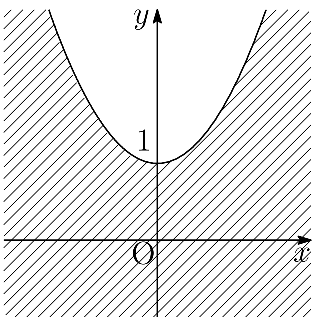
$x_1 - x_2 = 2$ であるから

$$-a^2 + 2b = 2^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = \frac{a^2}{2} + 2}$$

(2) A，B の交点を通る直線の方程式は，A，B の 2 式から x^2 を消去すると

$$y = ax - \frac{a^2}{2} + \frac{b}{2} \tag{$**$}$$

上式に (1) の結果を代入すると



$$y = ax - \frac{a^2}{4} + 1$$

これを a について整理すると

$$a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

この a に関する 2 次方程式は実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-2x)^2 - (4y - 1) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y \leqq x^2 + 1}$$

求める領域は，図の斜線部分で境界線を含む.

(3) 直線 $(**)$ の傾きが a であるから，① および $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(1+a^2)(x_1-x_2)^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad (1+a^2)(-a^2+2b)=4$$

したがって　$b=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2}{1+a^2}$　$\cdots$②

線分の PQ の中点の y 座標は，$(*)$ の第 1 式により

$$a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}=a\cdot\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$$

② より　$\dfrac{b}{2}=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{1}{1+a^2}=\dfrac{1+a^2}{4}+\dfrac{1}{1+a^2}-\dfrac{1}{4}$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1+a^2}{4}+\frac{1}{1+a^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1+a^2}{4}\cdot\frac{1}{1+a^2}}=1$$

上式において，等号が成立するのは $(a>1)$

$$\frac{1+a^2}{4}=\frac{1}{1+a^2} \quad \text{すなわち} \quad a=1$$

したがって　$\dfrac{b}{2}\geqq 1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$　求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　■

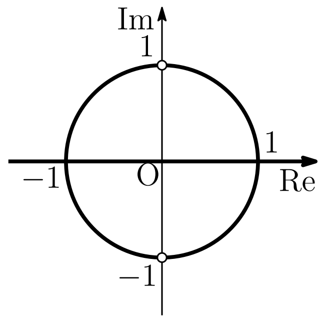
2 (1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}=\dfrac{2z}{z^2+1}$ が実数であるから $(z \neq \pm i)$

$$\frac{2z}{z^2+1}=\frac{2\overline{z}}{\overline{z}^2+1}$$

ゆえに　$(z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0$

したがって　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

すなわち　$z=\overline{z}$　または　$|z|=1$



図形 P は上図のとおり．ただし，∘ は除く．

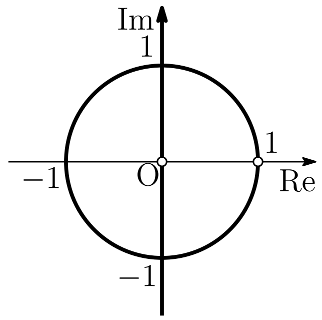
(2) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より　$w(z-i)=z+i$

ゆえに　$(w-1)z=i(w+1)$

これから　$w \neq 1$

したがって　$z=\dfrac{i(w+1)}{w-1}$　$\cdots(*)$

このとき，$z \neq i$ より　$w \neq 0$



(i) $z=\overline{z}$ のとき　$\dfrac{i(w+1)}{w-1}=\dfrac{-i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$

$(w+1)(\overline{w}-1)=-(w-1)(\overline{w}+1)$　ゆえに　$|w|^2=1$

(ii) $|z|=1$ のとき　$\left|\dfrac{i(w+1)}{w-1}\right|=1$

$|w+1|=|w-1|$　ゆえに　$w+\overline{w}=0$　すなわち　$\mathrm{Re}(w)=0$

(i)，(ii) より，w は上図のとおり．ただし，∘ は除く．■

3 (1) $V=\pi\displaystyle\int_0^h x^2\,dy=\pi\int_0^h y\,dy$ より　$\dfrac{dV}{dh}=\pi h$

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ より　$-\sqrt{h}=\pi h\cdot\dfrac{dh}{dt}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{dt}{dh}=-\pi\sqrt{h}$　ゆえに　$t=-\dfrac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}+C$

$t=0$ のとき，$h=1$ であるから　$t=\dfrac{2}{3}\pi\left(1-h^{\frac{3}{2}}\right)$

$h=0$ となる時間 T は　$\boldsymbol{T=\dfrac{2}{3}\pi}$ ■

$\boxed{4}$ 8回の移動のうち，正の向きに a 回，負の向きに b 回進むとすると

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

よって，$X(8)=2$ となる確率は

$${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{7}{32}}$$

7回目の点Pの座標を k とし，その確率を $P(k)$ とすると

(1)

k	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
$P(k)$	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

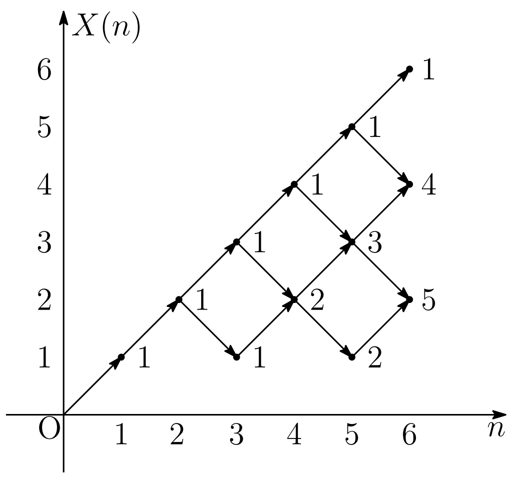
よって，求める期待値は

$$2\left(7\cdot\frac{1}{128}+5\cdot\frac{7}{128}+3\cdot\frac{21}{128}+1\cdot\frac{35}{128}\right)=\boldsymbol{\frac{35}{16}}$$

(2) 1回目から6回目まで正である確率は，下の図から

$$(1+4+5)\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{32}$$

よって，求める確率は　$2\times\frac{5}{32}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{3},\ \mathrm{AD}=2,\ \mathrm{AE}=\sqrt{3},\ \mathrm{AF}=1$ より

$$L(6)=(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{2(2+\sqrt{3})\pi}{3}}$$

(2) 正 n 角形の頂点を $\mathrm{A},\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\cdots\mathrm{B}_{n-1}$ とし，外接円の中心を O とする．

$$2\theta_k=\angle\mathrm{AOB}_k=\begin{cases}\dfrac{2k}{n}\pi & (2k\leqq n)\\[2mm] 2\pi-\dfrac{2k}{n}\pi & (n<2k<2n)\end{cases}$$

とおくと

$$\mathrm{AB}_k=2\sin\theta_k=2\sin\frac{k}{n}\pi\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

したがって

$$L(n)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AB}_k=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k}{n}\pi=4\pi\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}L(n)&=\lim_{n\to\infty}4\pi\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi\\&=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx\\&=4\Big[-\cos\pi x\Big]_0^1=\mathbf{8}\end{aligned}$$

■