

令和7年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$ について考える. $y = f(x)$ のグラフを C とおく.

- (1) $f(x)$ が極大値, 極小値をとるような x をそれぞれ求め, $f(x)$ の極大値, 極小値を求めよ.
- (2) C 上の点 $(-3, -6)$ を通り, C に接する直線の方程式をすべて求めよ.

2 整数 a, b, c は条件

$$2 \leq a < b < c \leq 6$$

を満たすとする.

- (1) 不等式 $a + b > c$ を満たすような (a, b, c) をすべて挙げよ.
- (2) 不等式 $a^2 + b^2 \geq c^2$ を満たすような (a, b, c) をすべて挙げよ.
- (3) (2) で求めた各 (a, b, c) について, 頂点 A, B, C と向かい合う辺の長さがそれぞれ a, b, c で与えられる $\triangle ABC$ を考える. このようなすべての $\triangle ABC$ について $\cos \angle ACB$ を求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ を次の条件により定める.

$$a_1 = 1, a_2 = 3,$$

$$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと,

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

- (3) $\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n}$ の値を求めよ.

4 関数 $f(x)$ は、すべての実数 x およびすべての整数 n について $f(nx) = \{f(x)\}^n$ を満たし、さらに $f(1) = 2$ を満たすとする。ただし、 $f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数とする。

- (1) $f(n) \leq 100$ となるような最大の整数 n を求めよ。
- (2) すべての実数 x について $f(x) > 0$ であることを証明せよ。
- (3) $f(0.25)$ を求めよ。
- (4) a が有理数のとき、 $f(a)$ を a で表せ。

解答例

- 1** (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

x	$\dots$	-1	$\dots$	5	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって 極大値 $f(-1) = 38$, 極小値 $f(5) = -70$

- (2) C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + f(t)$

$$y = (3t^2 - 12t - 15)(x - t) + t^3 - 6t^2 - 15t + 30$$

$$\text{すなわち } y = (3t^2 - 12t - 15)x - 2t^3 + 6t^2 + 30 \quad \dots (*)$$

直線 $(*)$ が点 $(-3, -6)$ を通るから

$$-6 = (3t^2 - 12t - 15) \cdot (-3) - 2t^3 + 6t^2 + 30$$

$$\text{整理すると } 2t^3 + 3t^2 - 36t - 81 = 0$$

$$\text{したがって } (t+3)^2(2t-9) = 0 \quad \text{ゆえに } t = -3, \frac{9}{2}$$

これを $(*)$ にそれぞれ代入すると¹.

$$y = 48x + 138, \quad y = -\frac{33}{4}x - \frac{123}{4}$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf **6**

2 $2 \leq a < b < c \leq 6$ を満たす整数 a, b, c の組は、次の 10 組 ($= {}_5C_3$)

$$(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), \\ (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6) \quad \cdots (*)$$

(1) $(*)$ の中で、 $a + b > c$ を満たすのは、次の 7 組.

$$(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), \\ (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

(2) $(*)$ の中で、 $a^2 + b^2 \geq c^2$ を満たすのは、次の 2 組.

$$(a, b, c) = (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$

(3) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(2) の結果をそれぞれ上式に代入すると

$$(a, b, c) = (3, 4, 5) \text{ のとき } \cos \angle ACB = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$$

$$(a, b, c) = (4, 5, 6) \text{ のとき } \cos \angle ACB = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$



3 (1) 与えられた漸化式から

$$(n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ より}$$

$$(n+1)b_{n+1} = (n+2)b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n$$

$$(2) \quad b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2, \quad \frac{b_{n+1}}{n+2} = \frac{b_n}{n+1} \text{ より}$$

$$\frac{b_n}{n+1} = \frac{b_1}{1+1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b_n = n+1$$

$$a_{n+1} - a_n = n+1 \text{ であるから, } n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$$

$$\text{したがって} \quad a_n - a_1 = \frac{1}{2}n(n-1) + n - 1$$

$$\text{上式は, } n=1 \text{ のときも成立するから} \quad a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{225} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{225} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{226} \right) = \frac{225}{113} \end{aligned}$$

■

- 4** (1) (*) $f(nx) = f(x)^n$ に $x = 1$ を代入すると, $f(1) = 2$ より

$$f(n) = f(1)^n = 2^n$$

$f(6) = 64$, $f(7) = 128$ であるから, $f(n) \leq 100$ となる最大の整数 n は

$$\mathbf{n = 6}$$

- (2) (*) より $f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$
 条件より, $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ であるから $f(x) > 0$

- (3) (*) より $f(1) = f(4 \cdot 0.25) = f(0.25)^4$

$$\text{したがって} \quad f(0.25) = f(1)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}$$

- (4) $a = \frac{n}{m}$ とすると (m, n は整数), (*) より

$$2 = f(1) = f\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)^m \quad \text{ゆえに} \quad f\left(\frac{1}{m}\right) = 2^{\frac{1}{m}}$$

したがって

$$f(a) = f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{m}}\right)^n = 2^{\frac{n}{m}} = 2^a$$

