令和６年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $m,\ n$ について，$2^m{\cdot}3^n$ の正の約数の個数を求めよ．

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ．

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)}$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

3 a を 0 でない実数とする．C を $y = -x^3 + x^2$ で表される曲線，ℓ を $y = a$ で表される直線とし，C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ．

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある.「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている．このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える．最初の持ち点は 0 点とし，この試行を繰り返す．例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる．なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ．また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする．

(1) この試行を 2 回行ったとき，持ち点が 1 である確率を求めよ．

(2) この試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 以下である確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $2^m{\cdot}3^n$ の約数は

$$2^j{\cdot}3^k \quad (j=0,1,2,\cdots,m,\quad k=0,1,2,\cdots,n)$$

よって，求める約数の個数は　$\boldsymbol{(m+1)(n+1)}$

(2) $6912=2^8{\cdot}3^3$ であるから，6912 の正の約数は

$$2^j{\cdot}3^k \quad (j=0,1,2,\cdots,8,\quad k=0,1,2,3)$$

よって，6912 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned}(1+2^1+2^2+\cdots+2^8)(1+3^1+3^2+3^3) &= \frac{2^9-1}{2-1}{\cdot}\frac{3^4-1}{3-1} \\ &= 511\times 40 = 20440\end{aligned}$$

6912 の約数のうち，12 で割り切れる数の総和は

$$\begin{aligned}(2^2+2^3+\cdots+2^8)(3^1+3^2+3^2) &= \frac{2{\cdot}2^8-2^2}{2-1}{\cdot}\frac{3{\cdot}3^2-3^1}{3-1} \\ &= 508\times 39 = 19812\end{aligned}$$

よって，求める総和は　$20440-19812=\mathbf{628}$

補足 初項 a，公比 r，末項 ℓ の等比数列の和 S は $(\ell=ar^{n-1})$

$$\boldsymbol{S=\frac{r\ell-a}{r-1}=\frac{a-r\ell}{1-r}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+1}=3a_n-\dfrac{3^{n+1}}{n(n+1)}$ より $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より $\boldsymbol{b_1=1}$，$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}}$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

これから $b_n-b_1=\dfrac{1}{n}-1$

上式は，$n=1$ のときも成立する．これに $b_1=1$ を代入すると

$$b_n-1=\frac{1}{n}-1 \quad \text{ゆえに} \quad b_n=\frac{1}{n}$$

したがって $\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{n}$ よって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n}{n}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=-x^3+x^2$ を微分すると　$y'=-3x^2+2x=-x(3x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ \dfrac{2}{3}$　したがって，y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{27}$	$\searrow$

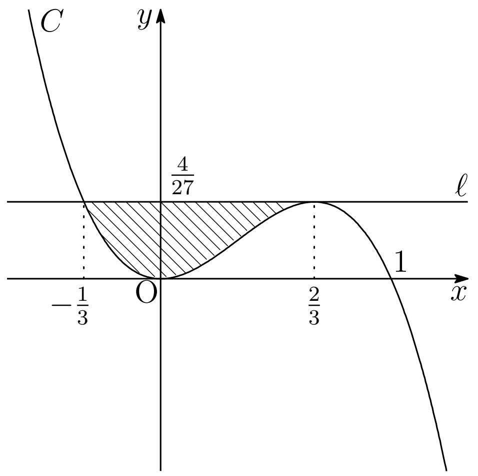
C と直線 $y=a$ (a は定数) がちょうど 2 点を共有する a の値は ($a\neq 0$)

$$\boldsymbol{a=\frac{4}{27}}$$

(2) (1) の増減表から求める共有点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx\\&=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-x\right)^2dx\\&=\frac{1!2!}{(3+1)!}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{3+1}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$



補足 次の公式[1] に $m=1$，$n=2$，$\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\beta=\dfrac{2}{3}$ を代入．

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{4}$ (1) $p = \dfrac{1}{8}$, $q = \dfrac{5}{8}$ とおく.

持ち点が 1，すなわち,「1」が 1 回,「0」が 1 回出る確率は

$${}_2\mathrm{C}_1 pq = 2pq = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{8} = \boldsymbol{\frac{5}{32}}$$

(2) 持ち点が 11，すなわち,「2」が 1 回,「3」が 3 回出る確率は

$${}_4\mathrm{C}_1 p{\cdot}p^3 = 4p^4$$

持ち点が 12，すなわち,「3」が 4 回出る確率は　p^4

以上から，試行を 4 回行って得点が 11 以上になる確率は

$$4p^4 + p^4 = 5p^4 = 5 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{5}{4096}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{4096} = \boldsymbol{\frac{4091}{4096}}$$

■