令和５年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 $P(x)$ を x についての整式とし，$P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする．

(1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ．

(2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ．

(3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ．

2 三角形 OAB は辺の長さが $\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = 5$，$\mathrm{AB} = 7$ であるとする．また，$\angle\mathrm{AOB}$ の 2 等分線と直線 AB との交点を P とし，頂点 B における外角の 2 等分線と直線 OP との交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の値を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，

$$K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$$

とおく．また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする．

(1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ．

(2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ．

(3) q_n を求めよ．また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ．

4 q を実数とする．座標平面上に円 $C : x^2+y^2 = 1$ と放物線 $P : y = x^2+q$ がある．

(1) C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき，q の値およびその接点の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた q の値を q_1，接点の y 座標を y_1 とするとき，連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ y \geqq x^2+q_1 \\ y \leqq y_1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(*)$ $P(x)P(-x)=P(x^2)$ に $x=0$ を代入すると

$$P(0)^2=P(0) \quad \text{ゆえに} \quad P(0)\{P(0)-1\}=0$$

よって　$P(0)=0$ または $P(0)=1$

(2) $(*)$ に $x=1$ を代入すると

$$P(1)P(-1)=P(1) \quad \text{ゆえに} \quad P(1)\{P(-1)-1\}=0$$

$P(x)$ が $x-1$ で割り切れないから，$P(1)\neq 0$ より

$$P(-1)-1=0$$

$Q(x)=P(x)-1$ とおくと，$Q(-1)=0$ であるから，$Q(x)$，すなわち，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる．

(3) $P(x)$ の最高次 (2 次) の係数を a とすると $(a\neq 0)$，$(*)$ の 4 次の係数を比較すると

$$a{\cdot}a=a \quad \text{ゆえに} \quad a=1$$

(i) $P(0)=0$ のとき，$P(x)=x^2+bx$ とし，$(*)$ に適用すると

$$(x^2+bx)(x^2-bx)=x^4+bx^2 \quad \text{ゆえに} \quad -b^2=b$$

これを解いて　$b=0,-1$　すなわち　$P(x)=x^2,\ x^2-x$

(ii) $P(0)=1$ のとき，$P(x)=x^2+cx+1$ とし，$(*)$ に適用すると

$$(x^2+cx+1)(x^2-cx+1)=x^4+cx^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2-c^2=c$$

これを解いて　$c=1,-2$　すなわち　$P(x)=x^2+x+1,\ x^2-2x+1$

よって　$\boldsymbol{P(x)=x^2,\ x^2-x,\ x^2+x+1,\ x^2-2x+1}$ ■

2 (1) OP は∠AOB の二等分線であるから　AP : PB = OA : OB = 3 : 5

したがって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

$\mathrm{AP} = 7\cdot\frac{3}{8},\ \mathrm{PB} = 7\cdot\frac{5}{8}$ より

$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} - \mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB} = 3\cdot5 - \frac{7\cdot3}{8}\cdot\frac{7\cdot5}{8} = 3\cdot5\left(1 - \frac{7^2}{8^2}\right) = \frac{15^2}{8^2}$$

よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{15}{8}}$

(2) 下の図のように OB の延長上に，BC = 7 となる点 C をとると，(1) の結果から，k, l を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表す．

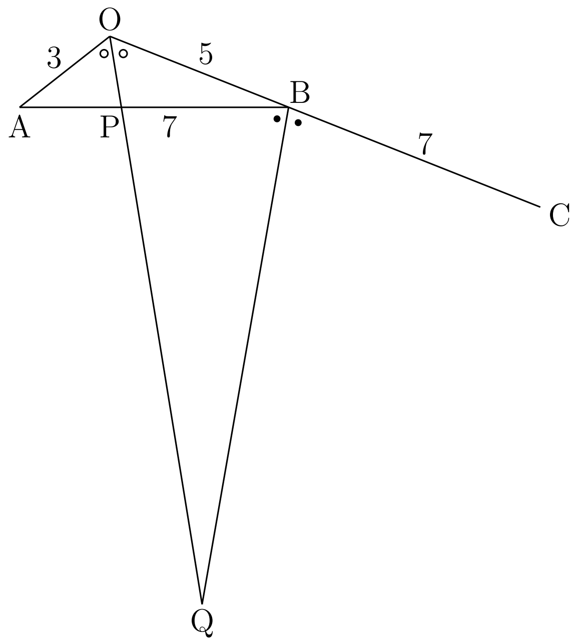
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 8k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 5k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3k\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + l(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + l\left\{(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{7}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \\ &= l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{2}{5}l + 1\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，上の 2 式から

$$5k = l,\quad 3k = \frac{2}{5}l + 1 \quad これを解いて \quad k = 1,\ l = 5$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 8\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 8|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 8\cdot\frac{15}{8} = \mathbf{15}$

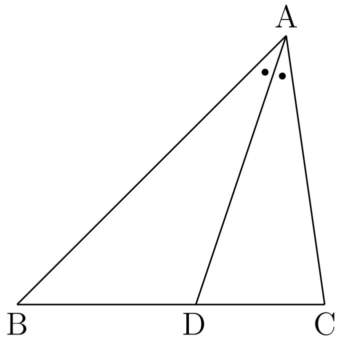


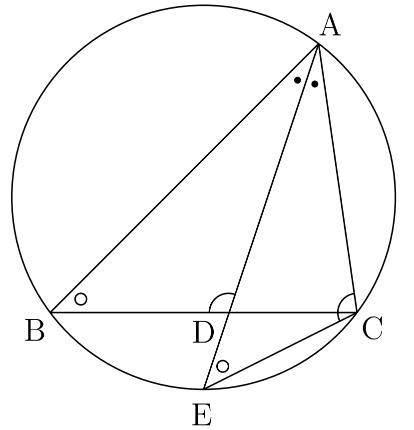
三角形の角の二等分線に関する公式

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB{\cdot}AC - BD{\cdot}DC}$$

証明 右下の図のように △ABC の外接円と AD の延長との交点を E とする．





$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{AEC}$ より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} \quad ゆえに \quad \mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC} = \mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{AE}$$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AD} + \mathrm{DE}$ より

$$\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{DE}$$

方べきの定理により，$\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{DE} = \mathrm{BD}{\cdot}\mathrm{DC}$ であるから

$$\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}{\cdot}\mathrm{DC} \quad よって \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC} - \mathrm{BD}{\cdot}\mathrm{DC}$$

■

3 $K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$ より

$$\begin{aligned} K_n &= |a_1-1| + |a_2-a_1| + \cdots + |a_n-a_{n-1}| + |6-a_n| \\ &\geqq |(a_1-1)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(6-a_n)| = 5 \qquad (*) \end{aligned}$$

したがって　$q_n = 5 \cdots$ ①

$a_1-1 \geqq 0,\ 6-a_n \geqq 0$ より，$(*)$ において等号が成立するとき，

$$a_2-a_1 \geqq 0,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1} \geqq 0$$

すなわち　$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$　(A)

$a_1-1,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ 6-a_n$ の $n+1$ 個から 5 個取る重複組合せは

$${}_{n+1}\mathrm{H}_5 = {}_{(n+1)+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_{n+5}\mathrm{C}_5$$

$K_n=5$ となる確率 $P(K_n=5)$ は

$$P(K_n=5) = \frac{{}_6\mathrm{H}_n}{6^n} = \frac{{}_{6+n-1}\mathrm{H}_n}{6^n} = \frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{6^n} \qquad (**)$$

(1) $(**)$ に $n=2$ を代入して　$P(K_2=5) = \dfrac{{}_7\mathrm{C}_5}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$

(2) $(**)$ に $n=3$ を代入して　$P(K_3=5) = \dfrac{{}_8\mathrm{C}_5}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{7}{27}}$

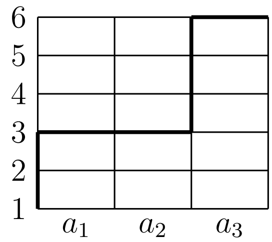
補足 $a_1-1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ 6-a_3$ の 4 個から 5 個取る重複組合せは[1]

$${}_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = 56$$

例えば，a_1-1 を 2 個，a_3-a_2 を 3 個取るとき

$$a_1-1=2,\ a_2-a_1=0,\ a_3-a_2=3,\ 6-a_3=0$$

このとき　$a_1=a_2=3,\ a_3=6$



(3) ① より　$\boldsymbol{q_n = 5}$

(A) より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Kdai/Kdai_ri_2022.pdf $\boxed{2}$ は関連問題．

4 (1) C と P の方程式から x を消去し，y について整理すると

$$y^2+y-q-1=0$$

この 2 次方程式は重解をもつから，係数について

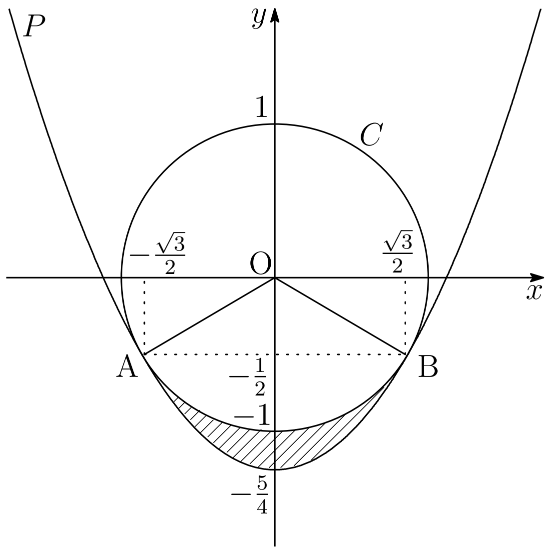
$$1^2-4\cdot1(-q+1)=0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{q=-\frac{5}{4}}$$

このとき　$y=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$x^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

これを解いて　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって　**接点** $\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)}$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{-\frac{1}{2}-\left(x^2-\frac{5}{4}\right)\right\}dx-(\text{扇形 OAB}-\triangle\text{OAB})\\
&=-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx-\frac{1}{2}\cdot1^2\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$



■