令和４年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 k を実数の定数とし，

$$f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$$

とする．

(1) $f(k-1)$ の値を求めよ．

(2) $|k| < 2$ のとき，不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け．

2 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15$ および

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{5} - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす数列とする．

(1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ．

3 $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$ である直角三角形 ABC において，その内接円の中心を O，半径を r とおく．また $a = \mathrm{BC}$ とする．

(1) r を a で表せ．

(2) 次の条件をみたす負でない整数 k, ℓ, m, n の組を一つ求めよ．

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : k + \sqrt{\ell}, \qquad \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = 1 : m + \sqrt{n}$$

4 箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある．そのうち 5 枚には A，3 枚には B，2 枚には C と書かれている．箱から 1 枚ずつ，3 回カードを取り出す試行を考える．

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ．

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ．

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合，2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件つき確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ より

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3-(2k-1)(k-1)^2+(k^2-k+1)(k-1)-k+1 \\ &= (k-1)^2\{(k-1)-(2k-1)\}+(k-1)\{(k^2-k+1)-1\} \\ &= -k(k-1)^2+k(k-1)^2=\mathbf{0} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は $x-k+1$ を因数にもつから

$$f(x)=(x-k+1)(x^2-kx+1)$$

$|k|<2$ より　$x^2-kx+1=\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\dfrac{4-k^2}{4}>0$

したがって，不等式 $f(x)\geqq 0$ を解くと　$\boldsymbol{x \geqq k-1}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{5}(n-10)$ より

$$a_1>a_2>\cdots>a_{10}=a_{11}<a_{12}<\cdots$$

a_n が最小となる自然数 n は　$\boldsymbol{n=10,\ 11}$

(2) 与えられた漸化式から，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{5}-2\right) \\ &= -15+\frac{1}{10}n(n-1)-2(n-1) \\ &= \frac{1}{10}(n^2-21n-130)=\frac{1}{10}(n+5)(n-26) \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{10}(n+5)(n-26)}$

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと　$S_{n+1}-S_{=}a_{n+1}$

(2) の結果から　$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{10}(n+6)(n-25)$

$$S_1>S_2>\cdots>S_{25}=S_{26}<S_{27}<\cdots$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が最小となる自然数 n は　$\boldsymbol{n=25,\ 26}$ ■

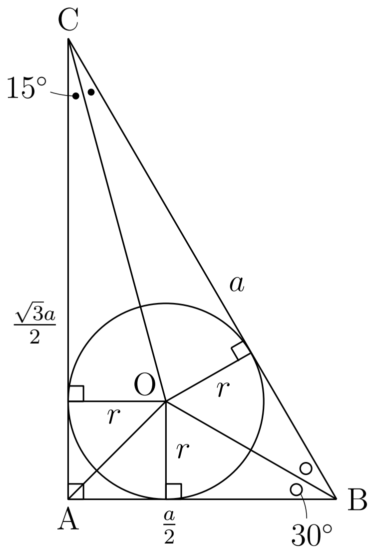
3 (1) △OAB + △OBC + △OCA = △ABC より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot r = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$(1+2+\sqrt{3})ar = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

したがって

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{2(3+\sqrt{3})} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{4}a}$$



(2) △OAB に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin 30^\circ} = \frac{\mathrm{OB}}{\sin 45^\circ}$$

よって　$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ = \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2}$

△OAC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin 15^\circ} = \frac{\mathrm{OC}}{\sin 45^\circ}$$

よって　$\mathrm{OA} : \mathrm{OC} = \sin 15^\circ : \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 1+\sqrt{3}$

したがって　　$\boldsymbol{(k,\ \ell,\ m,\ n) = (0,\ 2,\ 1,\ 3)}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2回連続して同じ文字のカードを取り出す確率として求めてもよい..

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{10}\right)^2=\frac{25+9+4}{100}=\mathbf{\frac{19}{50}}$$

(2) 1回目と3回目を1回目と2回目として，2回連続して同じカードを取り出す確率として求めてもよい.

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{{}_{10}\mathrm{P}_2}+\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_{10}\mathrm{P}_2}+\frac{{}_2\mathrm{P}_2}{{}_{10}\mathrm{P}_2}=\frac{20+6+2}{90}=\mathbf{\frac{14}{45}}$$

(3) 2回目に取り出したカードCを1回目に取り出したとして(条件下)，2回連続して同じ文字のカードを取り出す確率として求めてもよい.

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_2}+\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_2}=\frac{20}{72}+\frac{6}{72}=\mathbf{\frac{13}{36}}$$

■