令和３年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

$\boxed{\mathbf{1}}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角形 OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，直線 OA に関して点 D と対称な点を E，点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，$|\vec{a}| = 4$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ を満たすとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 x に対して，

$$f(x) = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

とおく．

(1) $t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおく．$\sin^2\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ k を $k > -1$ を満たす実数とする．直線 $\ell : y = (1-k)x + k$ および放物線 $C : y = x^2$ を考える．C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C と ℓ と直線 $x = 2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする．

(1) S_1 を k を用いて表せ.

(2) S_2 を k を用いて表せ.

(3) k が $k > -1$ を満たしながら動くとき，$S_2 - S_1$ の最大値を求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $S_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ より　$a_1 = S_1 = \dfrac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+7) = 3$

$n > 1$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n+5) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

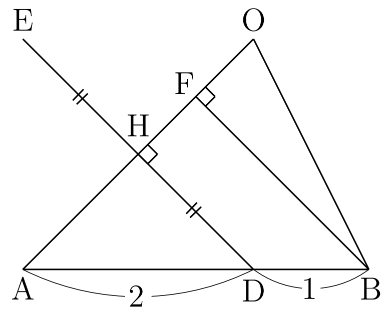
上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{6}{4^2}\vec{a} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a}}$



(2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{3|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\cdot 6}{4^2}\right)\vec{a} = \frac{7}{12}\vec{a}$$

H は線分 DE の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\cdot\frac{7}{12}\vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{5\vec{a} - 4\vec{b}}{6}}$$

(3) (1)，(2) の結果を $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ に代入すると

$$9\left|\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}\right| = 20\left|\frac{3}{8}\vec{a}\right| \quad \text{ゆえに} \quad |5\vec{a} - 4\vec{b}| = 5|\vec{a}|$$

$|5\vec{a} - 4\vec{b}|^2 = 25|\vec{a}|^2$ より　$25|\vec{a}|^2 - 40\vec{a}\cdot\vec{b} + 16|\vec{b}|^2 = 25|\vec{a}|^2$

したがって　$|\vec{b}|^2 = \dfrac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{5}{2}\cdot 6 = 15$　　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}| = \sqrt{15}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より

$$\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

したがって

$$\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\mathbf{1-\boldsymbol{t}^2}$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\mathbf{1-2\boldsymbol{t}^2}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)\\&=-10t^2+\sqrt{3}t+6\end{aligned}$$

$f(x)=0$ のとき　$10t^2-\sqrt{3}t-6=0$

$$(5t+2\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})=0$$

これを解いて　$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{5},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より $(0\leqq x\leqq\pi)$　$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq1$

$-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}<-\dfrac{1}{2}$ に注意すると　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7\pi}{6}$ であるから

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}}$$

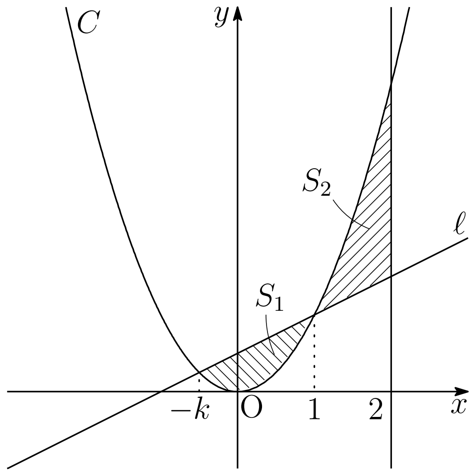
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C : y = x^2$ と $\ell : y = (1-k)x + k$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = (1-k)x + k$$

ゆえに　$(x-1)(x+k) = 0$

これを解いて $x = 1, -k$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-k}^{1} \{(1-k)x + k - x^2\}\,dx \\ &= -\int_{-k}^{1} (x+k)(x-1)\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(1+k)^3} \end{aligned}$$



(2) S_2 は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{1}^{2} \{x^2 - (1-k)x - k\}\,dx \\ &= \int_{1}^{2} (x-1)(x+k)\,dx \\ &= \int_{1}^{2} \{(x-1)^2 + (k+1)(x-1)\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{k+1}{2}(x-1)^2\right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{3k+5}{6}} \end{aligned}$$

(3) $f(k) = S_2 - S_1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{3k+5}{6} - \frac{1}{6}(1+k)^3 = -\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{2}{3} \\ f'(k) &= -\frac{1}{2}k^2 - k = -\frac{1}{2}k(k+2) \end{aligned}$$

$f(k)$ の増減表は $(k > -1)$

k	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$S_2 - S_1$ は，$k = 0$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ をとる．