# 令和２年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
## 文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

$\boxed{1}$ $k$ を正の実数とする．座標平面上に直線 $\ell : y = kx + 1$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．$\ell$ と $C$ の交点のうち $x$ 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．さらに，線分 PQ の垂直二等分線を $m$ とし，$m$ と $C$ の交点のうち $x$ 座標の小さい方を R，大きい方を S とする．

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を $k$ を用いて表せ．

(2) $k$ が正の実数を動くとき，線分 RS の中点 N の $y$ 座標が最小となる $k$ の値を求めよ．また，そのときの P と Q の座標を求めよ．

$\boxed{2}$ 関数

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta - \sin\theta + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

を考える．

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおく．$f(\theta)$ を $t$ の式で表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ．

(3) $a$ を実数の定数とする．$f(\theta) = a$ となる $\theta$ がちょうど 2 個であるような $a$ の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ $n$ を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを続けて $n$ 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ とする．

(1) $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を $n$ の式で表せ．

(2) $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を $n$ の式で表せ．

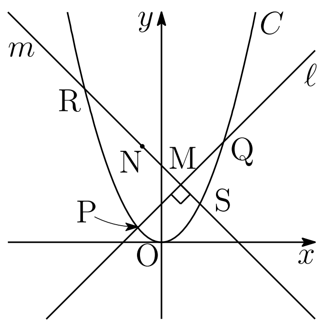
$\boxed{4}$ 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x - \dfrac{19}{8}$ がある．

(1) $C_1$ と $C_2$ の両方に接する直線をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた直線のうち傾きが負であるものを $\ell$ とする．$C_1$，$x$ 軸および $\ell$ が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\ell : y = kx + 1$ と $C : y = x^2$ の方程式から $y$ を消去して，整理すると




$$x^2 - kx - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を $D$ とすると

$$D = k^2 + 4 > 0$$

したがって，2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha + \beta = k \quad \text{ゆえに点 M の } x \text{ 座標} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k}{2}$$

点 M は $\ell$ 上であるから，その $y$ 座標は　$y = k\cdot\dfrac{k}{2} + 1 = \dfrac{k^2}{2} + 1$

よって，点 M の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2+2}{2}\right)}$

(2) P，Q の垂直二等分線 $m$ は，点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2+2}{2}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{k}$ の直線であるから，その方程式は

$$y - \frac{k^2+2}{2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad m : y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2+3}{2}$$

上の第 2 式と $C$ の方程式から $y$ を消去して，整理すると

$$x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2+3}{2} = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を $D'$ とすると

$$D' = \left(\frac{1}{k}\right)^2 - 4\cdot 1\left(-\frac{k^2+3}{2}\right) = \frac{1}{k^2} + 2(k^2+3) > 0$$

したがって，2 次方程式 $(**)$ の異なる 2 つの実数解を $x_1,\ x_2$ とすると

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{k} \quad \text{ゆえに N の } x \text{ 座標は} \quad \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{1}{2k}$$

点 N は $m$ 上であるから，その $y$ 座標は

$$y=-\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2k}\right)+\frac{k^2+3}{2}=\frac{1}{2k^2}+\frac{k^2+3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+k^2+3\right)\quad\cdots①$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{k^2}+k^2\geqq 2\sqrt{\frac{1}{k^2}\cdot k^2}=2\quad\cdots②$$

② において，等号が成立するとき $(k>0)$

$$\frac{1}{k^2}=k^2\quad \text{すなわち}\quad k=1$$

上式および ①，② より，$\boldsymbol{k=1}$ のとき，点 N の $y$ 座標は，最小値

$$\frac{1}{2}(2+3)=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

をとる．このとき，$(*)$ は　$x^2-x-1=0$　これを解いて

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

P，Q は直線 $\ell: y=x+1$ 上の点であるから，P，Q の条件により

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right),\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

**2** (1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta\quad \text{ゆえに}\quad \sin 2\theta=1-t^2$$

よって　$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $t=\sin\theta-\cos\theta$ より $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{ゆえに}\quad -1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

(1) の結果から　$f(t)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{12}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

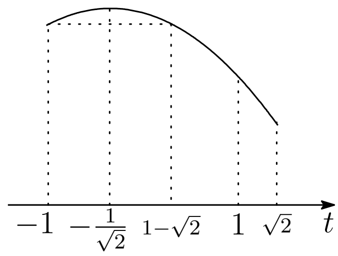
$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(3) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$1 \leqq t < \sqrt{2} \text{ に対する } \theta \text{は} 2 \text{個}$$

$g(t)=f(\theta)$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}$$




$g(-1)=g(1-\sqrt{2})=1$，$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

$g(1)=-1$，$g(\sqrt{2})=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，求める $a$ の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a\leqq -1,\ 1\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 出る目が $\{3,\ 6\}$ である確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\dfrac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n}-\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{2^n-1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\dfrac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は　$\dfrac{2^n-1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{1}{6^n}$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}\right)=\boldsymbol{\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x - \dfrac{19}{8}$ に接する直線を $y = ax + b$ とおく．この直線と $C_1$，$C_2$ のそれぞれの方程式と $y$ を消去して整理すると

$$2x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 + (a-2)x + b + \frac{19}{8} = 0$$

このとき，これらの方程式の係数について

$$a^2 + 8b = 0, \quad (a-2)^2 - 4\left(b + \frac{19}{8}\right) = 0 \tag{A}$$

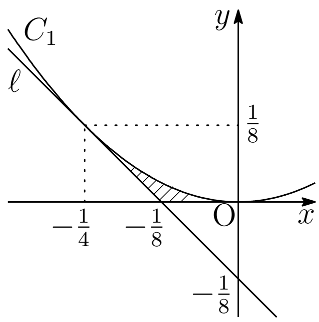
上の 2 式から $b$ を消去して整理すると　$3a^2 - 8a - 11 = 0$

ゆえに　$(a+1)(3a-11) = 0$　これを解いて　$a = -1,\ a = \dfrac{11}{3}$

(A) の第 1 式より　$(a,\ b) = \left(-1, -\dfrac{1}{8}\right),\ \left(\dfrac{11}{3}, -\dfrac{121}{72}\right)$

よって，求める直線は　$\boldsymbol{y = -x - \dfrac{1}{8},\quad y = \dfrac{11}{3}x - \dfrac{121}{72}}$

(2) (1) の結果から，直線 $\ell$ の方程式は




$$y = -x - \frac{1}{8}$$

これと $C_1 : y = 2x^2$ の共有点の $x$ 座標は

$$2x^2 = -x - \frac{1}{8} \quad \text{ゆえに} \quad (4x+1)^2 = 0$$

これを解いて　$x = -\dfrac{1}{4}$

3 点 $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{8},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{128}$$

よって，求める面積は [1]

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} 2x^2\,dx - \frac{1}{128} = \left[\ \frac{2}{3}x^3\ \right]_{-\frac{1}{4}}^{0} - \frac{1}{128} = \mathbf{\frac{1}{384}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)