平成 31 年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

$\boxed{1}$ p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2, -2,\ 1)$，P$(p, -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 a，b を p を用いて表せ．

(2) 点 Q が $\triangle$OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 A$(x,\ 0)$，B$(-2,\ 2)$，C$(-3,\ 3)$ をとる．直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\tan\theta$ を x で表せ．

(2) $x > 0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ．

$\boxed{3}$ n を自然数とする．数列 2, 1, 2, 1, 1 のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える．各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする．例えば，$n = 1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである．したがって，$s_1 = 1$ となる．$n = 2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 1, 1 の 2 つである．したがって，$s_2 = 2$ となる

(1) s_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ．

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ．

(4) s_n を求めよ．

$\boxed{4}$ 実数 a，b，c に対し，関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える．1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする．

(1) b と c を a で表せ．

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,-2,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(2,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\vec{n}$ とすると ($a,\ b,\ c$ は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって $\begin{cases} -a+2b+2c=p \\ 2a-2b+c=-1 \\ b-2c=2 \end{cases}$

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{p+2}{3},\quad b=\dfrac{4(p+2)}{9}},\quad c=\dfrac{2p-5}{9}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，条件を満たすとき

$$a\geqq 0,\quad b\geqq 0,\quad a+b\leqq 1$$

(1) の結果から $\dfrac{p+2}{3}\geqq 0,\quad \dfrac{4(p+2)}{9}\geqq 0,\quad \dfrac{p+2}{3}+\dfrac{4(p+2)}{9}\leqq 1$

これを解いて $\boldsymbol{-2\leqq p\leqq -\dfrac{5}{7}}$

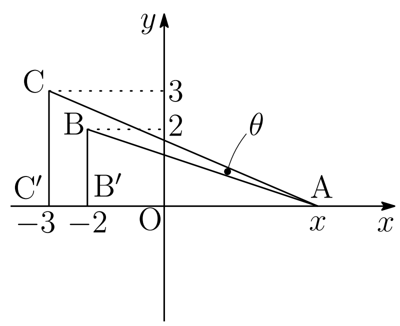
補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，
ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) 2 点 B，C から x 軸にそれぞれ垂線 BB$'$，CC$'$ を下ろし，$\beta=\angle\mathrm{BAB'}$，$\gamma=\angle\mathrm{CAC'}$ とすると



$$\tan\beta=\frac{2}{x+2},\quad \tan\gamma=\frac{3}{x+3},$$
$$\theta=\gamma-\beta$$

したがって

$$\tan\theta=\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\frac{\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x+2}}{1+\dfrac{3}{x+3}\cdot\dfrac{2}{x+2}}$$
$$=\frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+2)(x+3)+6}=\boldsymbol{\frac{x}{x^2+5x+12}}$$

(2) (1) の結果から $\quad f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{12}{x}+5}\quad (x>0)\quad\cdots①$

$x>0$，$\dfrac{12}{x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}\quad\cdots②$$

② において，等号が成立するとき

$$x=\frac{12}{x}\quad すなわち\quad x=2\sqrt{3}$$

①，② から $\quad f(x)\leqq\dfrac{1}{4\sqrt{3}+5}=\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$

よって，$\boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件を満たす数列は，次の 3 通り．

$$\{1,\ 1,\ 1\},\quad \{1,\ 2\},\quad \{2,\ 1\}$$

よって　$\boldsymbol{s_3 = 3}$

(2) 数列の和が n となる数列の個数 s_n は，その数列の末項が 1 となる個数は s_{n-1} であり，末項が 2 となる個数は s_{n-2} であるから

$$\boldsymbol{s_n = s_{n-1} + s_{n-2}}$$

(3) $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2}) \cdots (*)$ より

$$s_n - (\alpha+\beta)s_{n-1} + \alpha\beta s_{n-2} = 0 \quad \cdots ①$$

(2) の結果から　$s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0 \quad \cdots ②$

①，② の係数を比較して　$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1 \quad \cdots (**)$

$\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ を解とする 2 次方程式は　$x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots ③$

これを解いて　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(4) $(*)$ より　$s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n-1}(s_2 - \alpha s_1) = \beta^{n-1}(2-\alpha)$

ここで，β は，方程式 ③ の解であるから　$\beta^2 - \beta - 1 = 0$

上式および $(**)$ により　$2 - \alpha = 1 + \beta = \beta^2$

したがって　$s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n+1}$

同様にして　$s_{n+1} - \beta s_n = \alpha^{n+1}$

上の 2 式から　
$$s_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$，$f'(x)=3x^2-6ax+b$ について

$$f(x)=f'(x)g(x)-6x \quad \cdots (*)$$

を満たす 1 次関数 $g(x)$ は，$f(x)$ の x^3 の項の係数に注意して

$$g(x)=\frac{x}{3}+k \quad (k\text{ は定数})$$

とおける．上の諸式を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^3-3ax^2+bx+c &= (3x^2-6ax+b)\left(\frac{x}{3}+k\right)-6x \\ &= x^3+(3k-2a)x^2+\left(\frac{b}{3}-6ak-6\right)x+bk \end{aligned}$$

上式の両辺の x^2，x の項の係数および定数項を比較して

$$-3a=3k-2a,\quad b=\frac{b}{3}-6ak-6,\quad c=bk$$

整理すると　$k=-\dfrac{a}{3}\cdots$①,　$b=-9ak-9\cdots$②,　$c=bk\cdots$③

① を ② に代入すると　$\boldsymbol{b=3a^2-9}$

これと ① を ③ に代入すると　$\boldsymbol{c=-a^3+3a}$

(2) (1) の結果から　$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2-9=3(x-a)^2-9$

上式より，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α, β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{3a^2-9}{3}=a^2-3$$

このとき，$(*)$ より　$f(\alpha)=-6\alpha$,　$f(\beta)=-6\beta$

3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，

$$f(\alpha)f(\beta)<0$$

を満たせばよいから

$$-6\alpha\cdot(-6\beta)=36\alpha\beta=36(a^2-3)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}}$