

平成31年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 p を負の実数とする. 座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする. また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする.

(1) $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ となる実数 a, b を p を用いて表せ.

(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ.

2 x を正の実数とし, 座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる. 直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする. ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan \theta$ を x で表せ.

(2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ.

3 n を自然数とする. 数列 $2, 1, 2, 1, 1$ のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える. 各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする. 例えば, $n = 1$ のときは, 1 項からなる数列 1 のみである. したがって, $s_1 = 1$ となる. $n = 2$ のときは, 1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 $1, 1$ の 2 つである. したがって, $s_2 = 2$ となる.

(1) s_3 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ のとき, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ.

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 (α, β) を 1 組求めよ.

(4) s_n を求めよ.

4 実数 a, b, c に対し, 関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える. 1 次関数 $g(x)$ があり, $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は, すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする.

(1) b と c を a で表せ.

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように, a の値の範囲を定めよ.

解答例

- 1 (1) $\vec{OA} = (-1, 2, 0)$ および $\vec{OB} = (2, -2, 1)$ に垂直なベクトルの1つを

$$\vec{n} = (2, 1, -2)$$

とおく. $\vec{OP} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{n}$ とすると (a, b, c は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} -a + 2b + 2c = p \\ 2a - 2b + c = -1 \\ b - 2c = 2 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{p+2}{3}, \quad b = \frac{4(p+2)}{9}, \quad c = \frac{2p-5}{9}$$

- (2) $\vec{OQ} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ であるから, 条件を満たすとき

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \leq 1$$

$$(1) \text{の結果から} \quad \frac{p+2}{3} \geq 0, \quad \frac{4(p+2)}{9} \geq 0, \quad \frac{p+2}{3} + \frac{4(p+2)}{9} \leq 1$$

$$\text{これを解いて} \quad -2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき,
ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

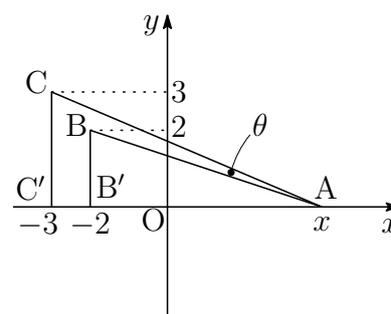
は, \vec{a} および \vec{b} に直交する. このベクトルを, \vec{a} と \vec{b} のベクトル積と言い,
 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

- 2 (1) 2点 B, C から x 軸にそれぞれ垂線 BB' , CC' を下ろし, $\beta = \angle BAB'$, $\gamma = \angle CAC'$ とすると

$$\tan \beta = \frac{2}{x+2}, \quad \tan \gamma = \frac{3}{x+3},$$

$$\theta = \gamma - \beta$$



したがって

$$\tan \theta = \tan(\gamma - \beta) = \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta} = \frac{\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}}{1 + \frac{3}{x+3} \cdot \frac{2}{x+2}}$$

$$= \frac{3(x+2) - 2(x+3)}{(x+2)(x+3) + 6} = \frac{x}{x^2 + 5x + 12}$$

(2) (1) の結果から $f(x) = \frac{1}{x + \frac{12}{x} + 5} \quad (x > 0) \quad \dots \textcircled{1}$

$x > 0$, $\frac{12}{x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{12}{x}} = 4\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

②において, 等号が成立するとき

$$x = \frac{12}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = 2\sqrt{3}$$

①, ② から $f(x) \leq \frac{1}{4\sqrt{3} + 5} = \frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$

よって, $x = 2\sqrt{3}$ のとき, 最大値 $\frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$ をとる. ■

- 3 (1) 条件を満たす数列は、次の3通り.

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}$$

よって $s_3 = 3$

- (2) 数列の和が n となる数列の個数 s_n は、その数列の末項が 1 となる個数は s_{n-1} であり、末項が 2 となる個数は s_{n-2} であるから

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

- (3) $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2}) \cdots (*)$ より

$$s_n - (\alpha + \beta)s_{n-1} + \alpha\beta s_{n-2} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(2) の結果から $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の係数を比較して $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1 \quad \cdots (**)$

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を解とする 2 次方程式は $x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$

これを解いて $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- (4) $(*)$ より $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n-1}(s_2 - \alpha s_1) = \beta^{n-1}(2 - \alpha)$

ここで、 β は、方程式 $\textcircled{3}$ の解であるから $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

上式および $(**)$ により $2 - \alpha = 1 + \beta = \beta^2$

したがって $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n+1}$

同様にして $s_{n+1} - \beta s_n = \alpha^{n+1}$

上の 2 式から $s_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$



- 4 (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ について

$$f(x) = f'(x)g(x) - 6x \quad \dots (*)$$

を満たす1次関数 $g(x)$ は, $f(x)$ の x^3 の項の係数に注意して

$$g(x) = \frac{x}{3} + k \quad (k \text{ は定数})$$

とおける. 上の諸式を (*) に代入すると

$$\begin{aligned} x^3 - 3ax^2 + bx + c &= (3x^2 - 6ax + b) \left(\frac{x}{3} + k \right) - 6x \\ &= x^3 + (3k - 2a)x^2 + \left(\frac{b}{3} - 6ak - 6 \right) x + bk \end{aligned}$$

上式の両辺の x^2 , x の項の係数および定数項を比較して

$$-3a = 3k - 2a, \quad b = \frac{b}{3} - 6ak - 6, \quad c = bk$$

整理すると $k = -\frac{a}{3} \dots \textcircled{1}$, $b = -9ak - 9 \dots \textcircled{2}$, $c = bk \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると $b = 3a^2 - 9$

これと $\textcircled{1}$ を $\textcircled{3}$ に代入すると $c = -a^3 + 3a$

- (2) (1) の結果から $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 9 = 3(x - a)^2 - 9$

上式より, $f'(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもち, それらを α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{3a^2 - 9}{3} = a^2 - 3$$

このとき, (*) より $f(\alpha) = -6\alpha$, $f(\beta) = -6\beta$

3次方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき,

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

を満たせばよいから

$$-6\alpha \cdot (-6\beta) = 36\alpha\beta = 36(a^2 - 3) < 0$$

これを解いて

$$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

