平成30年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護・作業]))

1 $t>1$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ において $\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{BC}=t-1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ とし，点Oを $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心とする．

(1) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ．

(2) 直線COと直線ABが垂直に交わるときの t の値を求めよ．

2 a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とする．

(1) m を a と b で表せ．

(2) $a+2b\leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ．また，このときの m の値を求めよ．

3 赤色，青色，黄色のサイコロが1つずつある．この3つのサイコロを同時に投げる．赤色，青色，黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める．

(1) s，t，u のうち少なくとも2つが500以上となる確率を求めよ．

(2) $s>t>u$ となる確率を求めよ．

4 p を実数とする．関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を2個もつとする．

(1) このような p の値の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ．また，このときの S_1 の値を求めよ．

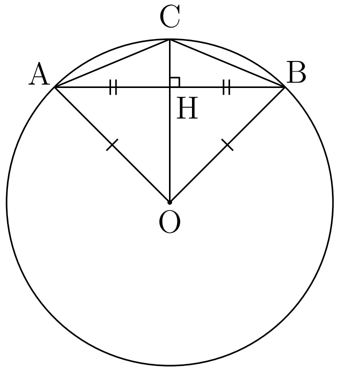
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると，$a=t-1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{t^2+1}$ より

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(t-1)^2+2-(t^2+1)}{2(t-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2(t-1)}{2\sqrt{2}(t-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\angle\mathbf{ACB=135^\circ}$

(2) 直線 CO と直線 AB が垂直であるとき，その交点を H とすると，H は線分 AB の中点であるから，右の図から



$$\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\quad ゆえに\quad t-1=\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{t=1+\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b\quad(0\leqq x\leqq 1)$

(i) $1\leqq -\dfrac{a}{2}$　すなわち　$a\leqq -2$ のとき，$m=f(1)=a+b+1$

(ii) $0\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1$　すなわち　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき，$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

(iii) $-\dfrac{a}{2}\leqq 0$　すなわち　$0\leqq a$ のとき，$m=f(0)=b$

(i)〜(iii) より
$$\boldsymbol{m=\begin{cases} a+b+1 & (a\leqq -2)\\ -\dfrac{a^2}{4}+b & (-2\leqq a\leqq 0)\\ b & (0\leqq a)\end{cases}}$$

(2) $a+2b\leqq 2$ より，$t=2-a-2b$ とおくと $(t\geqq 0)$　$b=-\dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2}$　$\cdots$①

これを (1) の結果に代入し，整理すると

$$m=\begin{cases} \dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2} & (a\leqq -2)\\ -\dfrac{1}{4}(a+1)^2+\dfrac{5}{4}-\dfrac{t}{2} & (-2\leqq a\leqq 0)\\ -\dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2} & (0\leqq a)\end{cases}$$

t を固定すると，m は a の関数で，$a=-1$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}-\dfrac{t}{2}$ をとる．

これがさらに最大となるのは，$t=0$ のときで最大値 $\dfrac{5}{4}$.

このとき，① から $b=\dfrac{3}{2}$．よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=\dfrac{3}{2},\ m=\dfrac{5}{4}}$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $s = 100R + 10B + Y$ について，s が 500 以上であることと R が 5 または 6 であることは同値．同様に，t，u がそれぞれ 500 以上であることと，B，Y がそれぞれ 5 または 6 であることは同値である．

s，t，u のうち丁度 2 つが 500 以上である確率は $\quad {}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{6}\right)^2\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{9}$

s，t，u の 3 つが 500 以上である確率は $\quad \left(\dfrac{2}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{27} = \boldsymbol{\dfrac{7}{27}}$

(2) $s > t$ となるとき $\quad s - t = 100(R-B) + 10(B-Y) + Y - R > 0 \quad \cdots①$

$t > u$ となるとき $\quad t - u = 100(B-Y) + 10(Y-R) + R - B > 0 \quad \cdots②$

上の 2 式の百の位の係数に注目すると，$R - B \geqq 0$ かつ $B - Y \geqq 0$ であることが ①，② を満たすための必要条件である．

(i) $R - B > 0$，$B - Y > 0$，すなわち，$R > B > Y$ のとき，①，② を満たす．このときの確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{6^3} = \frac{20}{6^3}$$

(ii) $R - B = 0$，$B - Y > 0$，すなわち，$R = B > Y$ のとき，①，② を満たす．このときの確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^3} = \frac{15}{6^3}$$

(iii) $R - B > 0$，$B - Y = 0$，すなわち，$R > B = Y$ のとき，② を満たさない．

(iv) $R - B = 0$，$B - Y = 0$，すなわち，$R = B = Y$ のとき，①，② を満たさない．

(i)〜(iv) より，求める確率は $\quad \dfrac{20}{6^3} + \dfrac{15}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{35}{216}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C_1 : y = x^3 + px^2 + x$，$C_2 : y = x^2$ の 2 式から，y を消去して整理すると

$$x\{x^2 + (p-1)x + 1\} = 0$$

条件を満たすとき，2 次方程式

$$x^2 + (p-1)x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

の係数について

$$D = (p-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = (p+1)(p-3) > 0 \quad \cdots ①$$

2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = -p + 1 > 0, \quad \alpha\beta = 1 \quad \cdots (**)$$

① および上式から　　$\boldsymbol{p < -1}$

(2) $S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$，$S_2 = -\displaystyle\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$S_1 = S_2$ より，$S_1 - S_2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx + \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\,dx \\ &= -\int_0^\beta x^2(\beta - x)\,dx + \alpha\int_0^\beta x(\beta - x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3 = \frac{\beta^3}{12}(2\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \beta$ であるから　$\beta = 2\alpha$　$(**)$ の第 2 式により　$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \beta = \sqrt{2}$

さらに $(**)$ の第 1 式により　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = -p + 1$　ゆえに　$\boldsymbol{p = 1 - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-2\alpha)\,dx \\ &= -\int_0^\alpha x^2(\alpha - x)\,dx + 2\alpha\int_0^\alpha x(\alpha - x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^4 + 2\alpha\cdot\frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{4}\alpha^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}}$