

平成29年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 自然数の2乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1) + 7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

2 平面上の点 O を中心とする半径1の円を C とする. 円 C の内部に点 A がある. 点 C の周上を2点 P, Q が条件 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ を満たしながら動く. 線分 PQ の中点を R とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $|\vec{a}| = r$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする. ただし, $0 < r < 1$ とする.

(1) $|\overrightarrow{AR}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OA 上の点 B で, $|\overrightarrow{BR}|^2$ が2点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ. また, このときの $|\overrightarrow{BR}|^2$ の値を r を用いて表せ.

3 正四面体 $ABCD$ の頂点を移動する点 P がある. 点 P は, 1秒ごとに, 隣の3頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか, もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる. 初め頂点 A にいた点 P が, n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする. ただし, $0 < a < 1$ とし, n は自然数とする.

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.

(2) 確率 p_n を求めよ.

4 a, b を実数とし, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする. このような a, b が満たす条件を求めよ. また, 点 $P(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad n(n+1) + a = (n+k)^2 \quad \dots (*) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

n, k は自然数であるから, $n \geq 1, 2k-1 > 0$ より

$$a \geq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geq k^2 + 2k - 1 \quad \dots (**)$$

(2) (*) において, $a = 7$ であるから, このとき, (**) により

$$7 \geq k^2 + 2k - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+4)(k-2) \leq 0$$

これを満たす自然数 k は 1, 2

$$\textcircled{1} \text{ より, } n = \frac{7-k^2}{2k-1} \text{ であるから}$$

$$k=1 \text{ のとき } n=6, \quad k=2 \text{ のとき } n=1$$

よって, 求める自然数 n は 1, 6 ■

2 (1) $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a}$ について, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$, $|\vec{a}| = r$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{q} - \vec{a}) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{q} - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

R は 2 点 P, Q の中点であるから, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$ より ($|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AR}|^2 &= \left| \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} \right|^2 = \left| \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - \vec{a} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{p} + \vec{q}|^2 - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{p}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2) - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2\end{aligned}$$

① から, $-(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 = -\vec{p} \cdot \vec{q}$ を上式に代入すると

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q}$$

(2) 点 B は直線 OA 上の点であるから, $\overrightarrow{OB} = t\vec{a}$ とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= \left| \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} \right|^2 = \left| \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - t\vec{a} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{p} + \vec{q}|^2 - t(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \vec{p} \cdot \vec{q}) - t(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2t^2\end{aligned}$$

① より, $(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} = \vec{p} \cdot \vec{q} + r^2$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= \frac{1}{2}(1 + \vec{p} \cdot \vec{q}) - t(\vec{p} \cdot \vec{q} + r^2) + r^2t^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - t \right) \vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{1}{2} + (t^2 - t)r^2\end{aligned}$$

上式が, 2 点 P, Q の位置によらず一定であるとき

$$\frac{1}{2} - t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{2}$$

よって, B は線分 OA の中点で, $|\overrightarrow{BR}|^2 = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{4}$ ■

- 3 (1) 点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率が p_n であるから、点 P が n 秒後に頂点 B, C, D いる確率は等しく

$$\frac{1-p_n}{3}$$

であるから、点 P が $n+1$ 秒後に A にいる確率は

$$p_{n+1} = (1-a)p_n + 3 \times \frac{a}{3} \cdot \frac{1-p_n}{3}$$

よって
$$p_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right) p_n + \frac{a}{3}$$

(2) (1) の結果から
$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right) \left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{4}$, 公比 $1 - \frac{4}{3}a$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{4}\right) \\ p_n &= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1} \left(1 - a - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n \end{aligned}$$



4 (1) $k = \int_{-1}^1 f(t) dt$ とおくと, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + k$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{3}t^3 - at^2 + (a^2 - b)t + k \right\} dt \\ &= \left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)t^2 + kt \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3}a + 2k \end{aligned}$$

ゆえに $k = \frac{2}{3}a$ したがって $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \frac{2}{3}a \cdots (*)$

よって $f(0) = \frac{2}{3}a$

(2) (*) から $f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 - b = (x - a)^2 - b$

2次方程式 $f'(x) = 0$ が $x > 1$ において, 異なる2つの実数解をもつから

$$a > 1, \quad f'(a) = -b < 0, \quad f'(1) = (1 - a)^2 - b > 0$$

ゆえに $a > 1, \quad b > 0, \quad b < (a - 1)^2$

よって, 点 $P(a, b)$ の存在範囲は, 下図の斜線部分で境界線を含まない.

