平成29年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

1 自然数の2乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2 平面上の点Oを中心とする半径1の円を C とする．円 C の内部に点Aがある．点 C の周上を2点P，Qが条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く．線分PQの中点をRとする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする．ただし，$0<r<1$ とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ．

(2) 直線OA上の点Bで，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が2点P，Qの位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ．

3 正四面体ABCDの頂点を移動する点Pがある．点Pは，1秒ごとに，隣の3頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる．初め頂点Aにいた点Pが，n 秒後に頂点Aにいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 確率 p_n を求めよ．

4 a，b を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする．

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つとする．このような a，b が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2 \quad \cdots(*)$ より

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

n，k は自然数であるから，$n \geqq 1$，$2k-1>0$ より

$$a \geqq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq k^2+2k-1 \quad \cdots(**)$$

(2) $(*)$ において，$a=7$ であるから，このとき，$(**)$ により

$$7 \geqq k^2+2k-1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+4)(k-2) \leqq 0$$

これを満たす自然数 k は　1，2

① より，$n = \dfrac{7-k^2}{2k-1}$ であるから

$$k=1 \text{ のとき } n=6, \quad k=2 \text{ のとき } n=1$$

よって，求める自然数 n は　**1，6**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}-\vec{a}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$|\vec{a}|=r$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{q}-\vec{a})\\&=\vec{p}\cdot\vec{q}-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

R は 2 点 P，Q の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$ より $(|\vec{p}|=|\vec{q}|=1)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2&=\left|\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})-\vec{a}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}|^2-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\&=\frac{1}{4}(|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2\end{aligned}$$

① から，$-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2=-\vec{p}\cdot\vec{q}$ を上式に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{q}=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}}$$

(2) 点 B は直線 OA 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\vec{a}$ とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2&=\left|\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})-t\vec{a}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}|^2-t(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2\\&=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-t(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2t^2\end{aligned}$$

① より，$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}=\vec{p}\cdot\vec{q}+r^2$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2&=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-t(\vec{p}\cdot\vec{q}+r^2)+r^2t^2\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{1}{2}+(t^2-t)r^2\end{aligned}$$

上式が，2 点 P，Q の位置によらず一定であるとき

$$\frac{1}{2}-t=0\quad ゆえに\quad t=\frac{1}{2}$$

よって，**B は線分 OA の中点で**，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}-\dfrac{r^2}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率が p_n であるから，点 P が n 秒後に頂点 B，C，D いる確率は等しく

$$\frac{1-p_n}{3}$$

であるから，点 P が $n+1$ 秒後に A にいる確率は

$$p_{n+1} = (1-a)p_n + 3 \times \frac{a}{3} \cdot \frac{1-p_n}{3}$$

よって $\boldsymbol{p_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)p_n + \frac{a}{3}}$

(2) (1) の結果から $p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \left(1 - \dfrac{4}{3}a\right)\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \dfrac{1}{4}$，公比 $1 - \dfrac{4}{3}a$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{4}\right) \\ p_n &= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1}\left(1 - a - \frac{1}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $k = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + k$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3 - at^2 + (a^2-b)t + k\right)dx \\ &= \left[\ \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}(a^2-b)t^2 + kt\ \right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{2}{3}a + 2k \end{aligned}$$

ゆえに　$k = \dfrac{2}{3}a$　したがって　$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2-b)x + \dfrac{2}{3}a \cdots (*)$

よって　　$f(0) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

(2) $(*)$ から　$f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 - b = (x-a)^2 - b$

2 次方程式 $f'(x) = 0$ が $x > 1$ において，異なる 2 つの実数解をもつから

$$a > 1, \quad f'(a) = -b < 0, \quad f'(1) = (1-a)^2 - b > 0$$

ゆえに　　$a > 1, \quad b > 0, \quad b < (a-1)^2$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は，下図の斜線部分で境界線を含まない．