平成 28 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

1 $a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ．

2 $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ の値も求めよ．

(2) (1) の $\alpha,\ \beta$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AC} = 1 + \sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ をみたすとする．

(1) $\beta = \angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2) (1) の β の値をすべて求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす実数 $s,\ t$ を求めよ．

4 $x,\ y$ を自然数とする．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$ における接線の方程式は

$$y-f(s)=f'(s)(x-s)$$

ゆえに　$y-(s^3+as^2+bs+c)=(3s^2+2as+b)(x-s)$

よって　$\boldsymbol{y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c}$

(2) $f'(s)=f'(t)$ より　$3s^2+2as+b=3t^2+2at+b$

ゆえに　$(s-t)(3s+3t+2a)=0$

$s\neq t$ より，$s-t\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{3s+3t+2a=0}$

(3) (2) の結果から，$s+t=-\dfrac{2a}{3}$ より

$$\begin{aligned}
f(s)+f(t)&=s^3+as^2+bs+c+t^3+at^2+bt+c\\
&=s^3+t^3+a(s^2+t^2)+b(s+t)+2c\\
&=(s+t)^3-3st(s+t)+a\{(s+t)^2-2st\}+b(s+t)+2c\\
&=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3-3st\left(-\frac{2a}{3}\right)+a\left\{\left(-\frac{2a}{3}\right)^2-2st\right\}+b\left(-\frac{2a}{3}\right)+2c\\
&=\frac{4a^3}{27}-\frac{2}{3}ab+2c,\\
f\left(-\frac{a}{3}\right)&=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c\\
&=\frac{2a^3}{27}-\frac{1}{3}ab+c
\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{s+t}{2}=-\dfrac{a}{3},\ \dfrac{f(s)+f(t)}{2}=f\left(-\dfrac{a}{3}\right)$

よって，$\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ の中点は，C 上の点 $\left(-\dfrac{a}{3},\ f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$ と一致する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10 \ \ (-2 \leqq x \leqq 4)$

(i) $-2 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=2x^2-4x-6$$
$$=2(x+1)(x-3)=2(x-1)^2-8$$

(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=-6$$

(iii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき

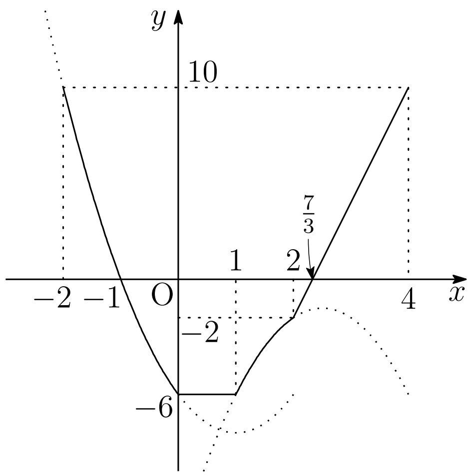
$$f(x)=-x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=-2x^2+10x-14$$
$$=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

(iv) $2 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$f(x)=x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=6x-14$$

(i)〜(iv) より，$y=f(x)$ のグラフは下の図のようになる．

グラフと x 軸との交点の x 座標 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ は　$\boldsymbol{\alpha=-1,\ \beta=\frac{7}{3}}$



(2) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(2x^2-4x-6)\,dx+\int_{0}^{1}(-6)\,dx$$
$$+\int_{1}^{2}(-2x^2+10x-14)\,dx+\int_{2}^{\frac{7}{3}}(6x-14)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^{0}-6+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_{1}^{2}$$
$$+\left[3x^2-14x\right]_{2}^{\frac{7}{3}}=-\frac{10}{3}-6-\frac{11}{3}-\frac{1}{3}=\boldsymbol{-\frac{40}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$B=\beta$，$C=45^\circ$ を正弦定理を適用すると

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\frac{2}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\beta=\frac{(1+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

したがって　$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) (1) の結果から，$0<\beta<180^\circ$ に注意して　$\boldsymbol{\beta=75^\circ,\ 105^\circ}$

(3) $\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，(2) の結果から　$B=75^\circ$

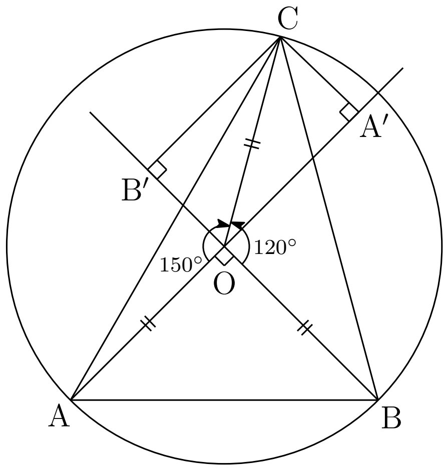
ゆえに　$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となす角はそれぞれ 150°，120° である．

点 C から直線 OA，OB に垂線 CA$'$, CB$'$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}'}=(\cos 120^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\cos 120^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　$s=\cos 150^\circ=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$t=\cos 120^\circ=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

補足 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ の補足を参照．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ は自然数であるから

$$\frac{3x}{x^2+2} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2) \leqq 0$$

x は自然数であるから，$x=1,\ 2$．このとき，$\dfrac{3x}{x^2+2}=1$

よって，求める自然数 x は　　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) (1) の結果から，自然数 x について，$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} \leqq 1$

また，自然数 y について，$0 < \dfrac{1}{y} \leqq 1$　ゆえに　$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} \leqq 2$

(i) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2} = 1,\quad \dfrac{1}{y} = 1$

(1) の結果を利用して　$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 1)$

(ii) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 1$ のとき　$\dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{3x}{x^2+2}$　$\cdots(*)$

$0 < \dfrac{1}{y} < 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{3x}{x^2+2} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ (x-3)^2 \leqq 7 \end{cases}$$

これを満たす自然数 x は　$x=3,\ 4,\ 5$

これらを $(*)$ に代入して

x	3	4	5
y	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{9}{4}$

(i)，(ii) より，求める自然数 $(x,\ y)$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)}$$