平成27年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護・作業]))

1 2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある．a は 0 でない実数とし，C_1 上の2点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を a で表せ．

(2) C_2 と ℓ が異なる2つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) C_2 と ℓ が異なる2つの共有点R，Sをもつとする．線分PQの長さと線分RSの長さが等しくなるとき，a の値を求めよ．

2 p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = p^n a_n$ とする．b_{n+1} を b_n，n，p で表せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

3 平面において，一直線上にない3点O，A，Bがある．Oを通り直線OAと垂直な直線上にOと異なる点Pをとる．Oを通り直線OBと垂直な直線上にOと異なる点Qをとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ．

4 ジョーカーを除く1組52枚のトランプのカードを1列に並べる試行を考える．

(1) 番号7のカードが4枚連続して並ぶ確率を求めよ．

(2) 番号7のカードが2枚ずつ隣り合い，4枚連続しては並ばない確率を求めよ．

解答例

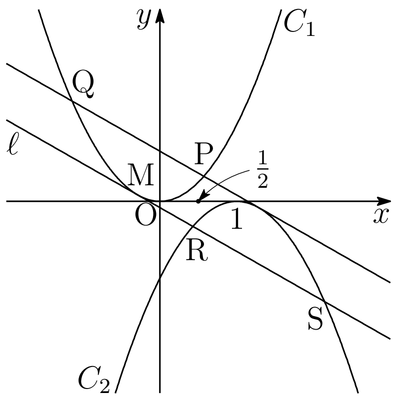
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{4a^2-a^2}{-2a-a}=-a$$

$C_1 : y=x^2$ より　$y'=2x$

C_1 と接線 ℓ の接点を M とすると，M の x 座標は (実は，P と Q の x 座標の中央)

$$2x=-a \quad ゆえに \quad x=-\frac{a}{2}$$



ℓ は点 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ を通り，傾き $-a$ の直線であるから

$$y-\frac{a^2}{4}=-a\left(x+\frac{a}{2}\right) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=-ax-\frac{a^2}{4}}$$

(2) $C_2 : y=-(x-1)^2$ と ℓ の方程式から y を消去すると

$$-(x-1)^2=-ax-\frac{a^2}{4} \quad ゆえに \quad x^2-(a+2)x+1-\frac{a^2}{4}=0 \quad \cdots(*)$$

上の 2 次方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D=(a+2)^2-4\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=2a(a+2)$$

C_2 と ℓ は異なる 2 つの共有点をもつから，$D>0$ より

$$2a(a+2)>0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$$

(3) $\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，2 点 P，Q の x 座標の差と 2 点 R，S の x 座標の差が等しいから

$$|-2a-a|=\frac{a+2+\sqrt{D}}{2}-\frac{a+2-\sqrt{D}}{2} \quad ゆえに \quad |3a|=\sqrt{D}$$

両辺を平方すると　$9a^2=2a(a+2)$　$a\neq 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{7}}$

補足 C_1 と C_2 は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．$\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，直線 $\mathrm{PQ} : y=-ax+2a^2$ と ℓ は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称となる．直線 PQ および ℓ の x 切片は，それぞれ $2a$，$-\dfrac{a}{4}$ で，その中央が $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{2a+\left(-\dfrac{a}{4}\right)}{2}=\frac{1}{2} \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a=\frac{4}{7}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ より $\qquad p^{n+1}a_n=p^na_n-(-p)^{n+1}$

$b_n=p^na_n$ より $\qquad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}}$

(2) $b_1=pa_1=p\cdot1=p$，(1) の結果から $\quad b_{n+1}-b_n=-(-p)^{n+1}$

(i) $-p\neq1$，すなわち，$p\neq-1$ のとき，$n\geqq2$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}\\ b_n-p&=-\frac{(-p)^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1-(-p)}\\ b_n&=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\quad b_n=\dfrac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$

(ii) $-p=1$，すなわち，$p=-1$ のとき，$n\geqq2$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)&=-\sum_{k=1}^{n-1}\\ b_n-(-1)&=-(n-1)\\ b_n&=-n\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\quad b_n=-n$

(i),(ii) から，一般項 a_n は

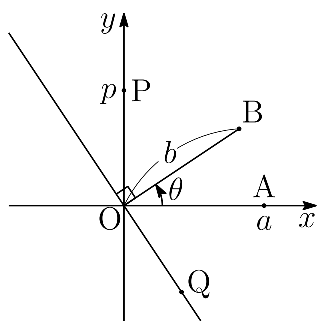
$$a_n=\frac{b_n}{p^n}=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1-(-p)^n}{(1+p)p^{n-1}}} & \boldsymbol{(p\neq-1)}\\ \boldsymbol{(-1)^{n-1}n} & \boldsymbol{(p=-1)}\end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(2) $a,b,p>0,\ q\neq 0$ とし，$\alpha=|\theta|$ を満たす θ をとる．条件から，一般性を失うことなく



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),\\ &\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b\cos\theta,\ b\sin\theta)\\ &\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\theta,-q\cos\theta)\end{aligned}$$

とおくことができる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=bp\sin\theta,\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\theta$$

これを (1) の結果に代入すると　　$bp\sin\theta=aq\sin\theta$

$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$bp=aq\quad\cdots(*)$

$a,b,p>0$ であるから，$(*)$ より　$q>0$

$p=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$，$q=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$，$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= -pq\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos|\theta|\\ &= -|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos(\pi-\alpha)\end{aligned}$$

上式より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角は　$\pi-\alpha$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-q'\sin\theta,\ q'\cos\theta)$ とおいて (1) の結果に代入すると

$bp\sin\theta=-aq'\sin\theta$　ゆえに　$bp=-aq'$　これより　$q'=-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=pq'\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|(-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|)\cos|\theta|=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha$

(3) $(*)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$　　よって　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$

$\boxed{4}$ (1) 52 枚のカードの並べ方は 52! 通り．番号 7 のカードをひとまとめにすると，番号 7 以外の 48 枚のカードとひとまとめにしたカードの並べ方は

$$(48+1)! = 49! \quad (\text{通り})$$

ひとまとめにした番号 7 のカードの並べ方は　$4!$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{49! \cdot 4!}{52!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5525}}$

(2) 4 枚の番号 7 のカードを 2 枚ずつ 2 組に分ける方法は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$ (通り)

番号 7 のカードを 2 枚ずつにした 2 組のカードの並べ方は

$$2! \cdot 2! = 4 \quad (\text{通り})$$

番号 7 以外の 48 枚のカードと 2 組のカードの並べ方は

$$(48+2)! = 50! \quad (\text{通り})$$

このとき，番号 7 の 4 枚が連続して並ばないので，(1) の結果を用いて

$$\frac{50! \cdot 3 \cdot 4 - 49! \cdot 4!}{52!} = \frac{50 \cdot 3 \cdot 4 - 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{(25-1)4!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \boldsymbol{\frac{24}{5525}}$$