平成 27 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある．a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を a で表せ．

(2) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R，S をもつとする．線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ．

2 p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = p^n a_n$ とする．b_{n+1} を b_n，n，p で表せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

3 平面において，一直線上にない 3 点 O，A，B がある．O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる．O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ．

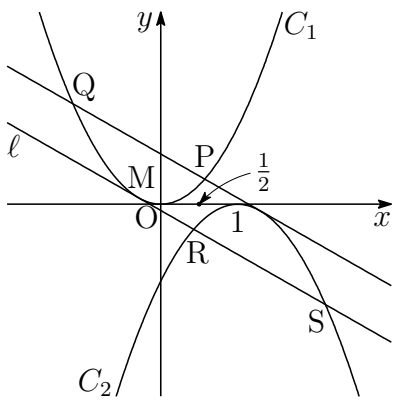
4 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える．

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ．

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ．

解答例

1 (1) 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは



$$\frac{4a^2-a^2}{-2a-a}=-a$$

$C_1: y=x^2$ より　$y'=2x$

C_1 と接線 ℓ の接点を M とすると，M の x 座標は (実は，P と Q の x 座標の中央)

$$2x=-a \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{a}{2}$$

ℓ は点 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ を通り，傾き $-a$ の直線であるから

$$y-\frac{a^2}{4}=-a\left(x+\frac{a}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-ax-\frac{a^2}{4}}$$

(2) $C_2: y=-(x-1)^2$ と ℓ の方程式から y を消去すると

$$-(x-1)^2=-ax-\frac{a^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(a+2)x+1-\frac{a^2}{4}=0 \quad \cdots(*)$$

上の 2 次方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D=(a+2)^2-4\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=2a(a+2)$$

C_2 と ℓ は異なる 2 つの共有点をもつから，$D>0$ より

$$2a(a+2)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$$

(3) $\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，2 点 P，Q の x 座標の差と 2 点 R，S の x 座標の差が等しいから

$$|-2a-a|=\frac{a+2+\sqrt{D}}{2}-\frac{a+2-\sqrt{D}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |3a|=\sqrt{D}$$

両辺を平方すると　$9a^2=2a(a+2)$　$a\neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{7}}$

補足 C_1 と C_2 は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．$\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，直線 $\mathrm{PQ}: y=-ax+2a^2$ と ℓ は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称となる．直線 PQ および ℓ の x 切片は，それぞれ $2a$，$-\dfrac{a}{4}$ で，その中央が $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{2a+\left(-\dfrac{a}{4}\right)}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{4}{7}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1}$ より　　$p^{n+1}a_{n+1} = p^n a_n - (-p)^{n+1}$

$b_n = p^n a_n$ より　　$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n - (-p)^{n+1}}$

(2) $b_1 = pa_1 = p{\cdot}1 = p$，(1) の結果から　$b_{n+1} - b_n = -(-p)^{n+1}$

(i) $-p \neq 1$，すなわち，$p \neq -1$ のとき，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = -\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}$$

$$b_n - p = -\frac{(-p)^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1-(-p)}$$

$$b_n = \frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$b_n = \dfrac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$

(ii) $-p = 1$，すなわち，$p = -1$ のとき，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = -\sum_{k=1}^{n-1}$$

$$b_n - (-1) = -(n-1)$$

$$b_n = -n$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$b_n = -n$

(i),(ii) から，一般項 a_n は

$$a_n = \frac{b_n}{p^n} = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1-(-p)^n}{(1+p)p^{n-1}}} & \boldsymbol{(p \neq -1)} \\ \boldsymbol{(-1)^{n-1}n} & \boldsymbol{(p = -1)} \end{cases}$$

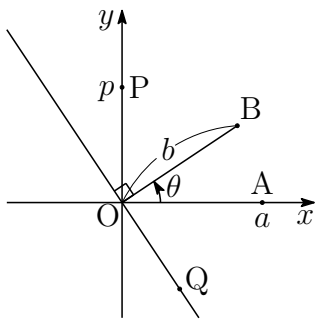
■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(2) $a,b,p>0,\ q\neq 0$ とし，$\alpha=|\theta|$ を満たす θ をとる．条件から，一般性を失うことなく



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\theta,-q\cos\theta)$$

とおくことができる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=bp\sin\theta,\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\theta$$

これを (1) の結果に代入すると　$bp\sin\theta=aq\sin\theta$

$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$bp=aq\quad\cdots(*)$

$a,b,p>0$ であるから，$(*)$ より　$q>0$

$p=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$，$q=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$，$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= -pq\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos|\theta|\\ &= -|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos(\pi-\alpha)\end{aligned}$$

上式より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角は　$\pi-\alpha$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-q'\sin\theta,\ q'\cos\theta)$ とおいて (1) の結果に代入すると

$bp\sin\theta=-aq'\sin\theta$　ゆえに　$bp=-aq'$　これより　$q'=-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=pq'\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|(-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|)\cos|\theta|=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha$

(3) $(*)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$　よって　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$　■

4 (1) 52 枚のカードの並べ方は 52! 通り．番号 7 のカードをひとまとめにすると，番号 7 以外の 48 枚のカードとひとまとめにしたカードの並べ方は

$$(48+1)! = 49! \ \text{（通り）}$$

ひとまとめにした番号 7 のカードの並べ方は　4!（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{49!\cdot 4!}{52!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{52\cdot 51\cdot 50} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5525}}$

(2) 4 枚の番号 7 のカードを 2 枚ずつ 2 組に分ける方法は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$（通り）

番号 7 のカードを 2 枚ずつにした 2 組のカードの並べ方は

$$2!\cdot 2! = 4 \ \text{（通り）}$$

番号 7 以外の 48 枚のカードと 2 組のカードの並べ方は

$$(48+2)! = 50! \ \text{（通り）}$$

このとき，番号 7 の 4 枚が連続して並ばないので，(1) の結果を用いて

$$\frac{50!\cdot 3\cdot 4 - 49!\cdot 4!}{52!} = \frac{50\cdot 3\cdot 4 - 4!}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{(25-1)4!}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{5525}}$$

■