平成 26 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

1 2 つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a\ (a > 0)$ がある．点 $\mathrm{P}_1\left(p, -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l_1 とする．

(1) C_1 と C_2 が共有点を持たないための a に関する条件を求めよ．

(2) l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a，p を用いて表せ．

(3) C_1 と C_2 が共有点を持たないとする．(2) で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ．

2 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 s，$t\ (s > t)$ を定めよ．

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

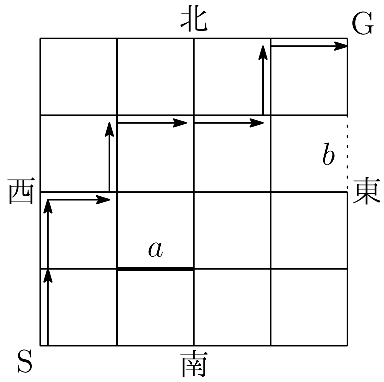
(2) 一般項 a_n を求めよ．

3 $\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする．正の実数 p に対して，BC を $(p+1) : p$ に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ．

4 図のような格子状の道路がある．S 地点を出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える．ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるに 2 分かかるものとする．たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる．



(1) a を通り抜ける経路は何通りあるか．

(2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか．

(3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a\ (a > 0)$ から y を消去すると

$$-x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)^2 + a \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$$

C_1，C_2 が共有点をもたないとき，上の第 2 式の係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1) > 0$$

$a > 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a > 1}$

(2) $f(x) = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$g(x) = (x-a)^2 + a$ とおくと

$$f'(x) = -2x, \quad g'(x) = 2(x-a)$$

$\mathrm{P}_2(q,\ g(q))$ とおくと，$f'(p) = g'(q)$ であるから

$$-2p = 2(q-a) \quad \text{ゆえに} \quad q = a - p,\ \ g(q) = p^2 + a$$

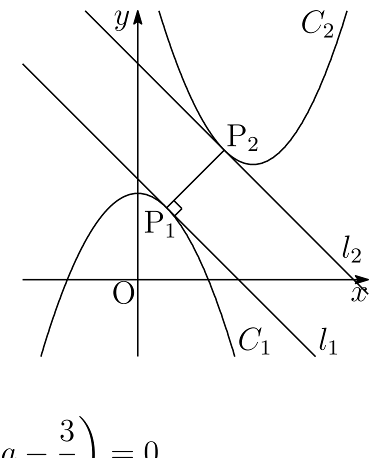
したがって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}_2(a-p,\ p^2+a)}$

l_2 は点 $\mathrm{P}_2(a-p,\ p^2+a)$ を通り，傾き $-2p$ の直線であるから

$$y - (p^2 + a) = -2p(x - a + p)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{y = -2px - p^2 + 2ap + a}$

(3) $\mathrm{P}_1\left(p, -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2(a-p,\ p^2+a)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \left(a - 2p,\ 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right)$$

$f'(p) = -2p$ より，l_1 の方向ベクトルを

$$\vec{v} = (1, -2p)$$

とすると，$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = 0$ であるから

$$1(a - 2p) - 2p\left(a - 2p,\ 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right) = 0$$

したがって　　$(2p-1)(2p^2 + p + a) = 0$

$a > 1$ より　$2p^2 + p + a = 2\left(p + \dfrac{1}{4}\right)^2 + a - \dfrac{1}{8} > 0$　　よって　$\boldsymbol{p = \dfrac{1}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式

$$(*)\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を変形すると，ともに

$$a_{n+2} = (s + t)a_{n+1} - sta_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

これが $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ に一致するから

$$s + t = 1, \quad st = -3 \quad \cdots (**)$$

s，t を解とする 2 次方程式は　　$x^2 - x - 3 = 0$

これを解いて　　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$s > t$ であるから　$\boldsymbol{s = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}}$，　$\boldsymbol{t = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}}$

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 1$ および $(*)$，$(**)$ より

$$a_{n+1} - sa_n = t^{n-1}(a_2 - sa_1) = t^{n-1}(1 - s) = t^n$$
$$a_{n+1} - ta_n = s^{n-1}(a_2 - ta_1) = s^{n-1}(1 - t) = s^n$$

上の 2 式から $(s \neq t)$

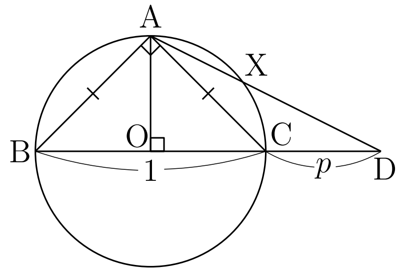
$$(s - t)a_n = s^n - t^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{s^n - t^n}{s - t}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) 点 D は BC を $(p+1):p$ に外分する点であるから，右の図から



$$\mathrm{OC}:\mathrm{OD}=\frac{1}{2}:\left(p+\frac{1}{2}\right)=1:(2p+1)$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(2) 点 X は，線分 AD 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad(0<t<1)\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2=(1-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t^2(2p+1)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

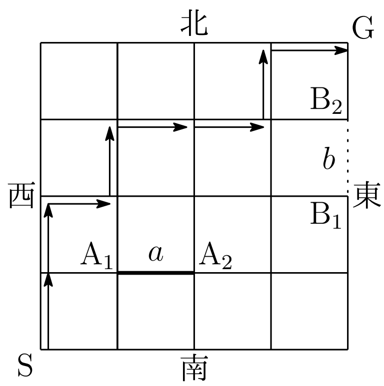
$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\neq 0$ であるから

$$1=(1-t)^2+t^2(2p+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad t\{(2p^2+2p+1)t-1\}=0$$

$0<t<1$ より $\quad t=\dfrac{1}{2p^2+2p+1},\quad 1-t=\dfrac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 図の S 地点から $\mathrm{A_1}$ 地点への経路の総数は



$$\frac{2!}{1!1!}=2\ (\text{通り})$$

図の $\mathrm{A_2}$ 地点から G 地点への経路の総数は

$$\frac{5!}{2!3!}=10\ (\text{通り})$$

よって，求める経路の総数は

$$2\times 10=\mathbf{20}\ (\text{通り})$$

(2) a，b を通り抜ける事象を，それぞれ A，B とする．
b を通り抜る経路 ($\mathrm{S}\to\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2\to\mathrm{G}$) の総数を $n(B)$ とすると

$$n(B)=\frac{6!}{4!2!}\times 1=15 \text{（通り）}$$

a と b を通り抜ける経路 ($\mathrm{S}\to\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2\to\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2\to\mathrm{G}$) の総数を $n(A\cap B)$ とすると

$$n(A\cap B)=\frac{2!}{1!1!}\times\frac{3!}{2!1!}\times 1=6 \text{（通り）}$$

a を通り抜けずに b を通り抜ける経路の総数を $n(\overline{A}\cap B)$ とすると

$$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=15-6=\mathbf{9} \text{（通り）}$$

(3) a 通り抜ける経路の総数を $n(A)$ とすると，(1) の結果から　$n(A)=20$
a を通り b を通り抜けいない経路の総数を $n(A\cap\overline{B})$ とすると

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=20-6=14 \text{（通り）}$$

a または b を通り抜ける経路の総数を $n(A\cup B)$ とすると

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+15-6=29 \text{（通り）}$$

すべての経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U)=\frac{8!}{4!4!}=70 \text{（通り）}$$

a も b も通り抜けない経路の総数を $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ とすると

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=70-29=41 \text{（通り）}$$

S から G に到達するまでの時間 X とその確率 P は

(i) $A\cap B$ のとき　$X=2\times 6+1+8=21$，$P=\dfrac{6}{70}$

(ii) $\overline{A}\cap B$ のとき　$X=2\times 7+8=22$，$P=\dfrac{9}{70}$

(iii) $A\cap\overline{B}$ のとき　$X=2\times 7+1=15$，$P=\dfrac{14}{70}$

(iv) $\overline{A}\cap\overline{B}$ のとき　$X=2\times 8=16$，$P=\dfrac{41}{70}$

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned}E(X)&=21\cdot\frac{6}{70}+22\cdot\frac{9}{70}+15\cdot\frac{14}{70}+16\cdot\frac{41}{70}\\&=15+\frac{6\cdot 6+7\cdot 9+1\cdot 41}{70}=\mathbf{17}\ \text{（分）}\end{aligned}$$

■