

平成26年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 2つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + \frac{3}{2}$, $C_2 : y = (x - a)^2 + a$ ($a > 0$) がある. 点 $P_1 \left(p, -p^2 + \frac{3}{2} \right)$ における C_1 の接線を l_1 とする.

- (1) C_1 と C_2 が共有点を持たないための a に関する条件を求めよ.
- (2) l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と, l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ.
- (3) C_1 と C_2 が共有点を持たないとする. (2) で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき, p を求めよ.

2 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 以下が成立するように, 実数 s, t ($s > t$) を定めよ.

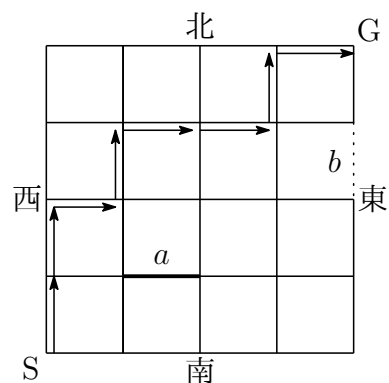
$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 一般項 a_n を求めよ.

3 $\triangle ABC$ を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし, その外接円の中心を O とする. 正の実数 p に対して, BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし, 線分 AD と $\triangle ABC$ の外接円との交点で A と異なる点を X とする.

- (1) ベクトル \overrightarrow{OD} を \overrightarrow{OC} , p を用いて表せ.
- (2) ベクトル \overrightarrow{OX} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OC} , p を用いて表せ.

- 4 図のような格子状の道路がある。S地点を出発して、東または北に進んでG地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに1分、点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに8分、それ以外の各区間を通り抜けるのに2分かかるものとする。たとえば、図の矢印に沿った経路ではSを出発しGに到達するまでに16分かかる。



- (1) a を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (3) すべての経路から任意に1つ選んだとき、S地点からG地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。

解答例

1 (1) $C_1: y = -x^2 + \frac{3}{2}$, $C_2: y = (x-a)^2 + a$ ($a > 0$) から y を消去すると

$$-x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)^2 + a \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$$

C_1, C_2 が共有点をもたないとき, 上の第2式の係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1) > 0$$

$a > 0$ に注意して $a > 1$

(2) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}$, $g(x) = (x-a)^2 + a$ とおくと

$$f'(x) = -2x, \quad g'(x) = 2(x-a)$$

$P_2(q, g(q))$ とおくと, $f'(p) = g'(q)$ であるから

$$-2p = 2(q-a) \quad \text{ゆえに} \quad q = a-p, \quad g(q) = p^2 + a$$

したがって $P_2(a-p, p^2 + a)$

l_2 は点 $P_2(a-p, p^2 + a)$ を通り, 傾き $-2p$ の直線であるから

$$y - (p^2 + a) = -2p(x - a + p)$$

ゆえに $y = -2px - p^2 + 2ap + a$

(3) $P_1\left(p, -p^2 + \frac{3}{2}\right)$, $P_2(a-p, p^2 + a)$ より

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(a - 2p, 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right)$$

$f'(p) = -2p$ より, l_1 の方向ベクトルを

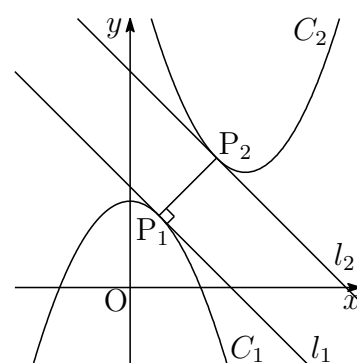
$$\vec{v} = (1, -2p)$$

とすると, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ であるから

$$1(a - 2p) - 2p\left(a - 2p, 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right) = 0$$

したがって $(2p-1)(2p^2 + p + a) = 0$

$a > 1$ より $2p^2 + p + a = 2\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + a - \frac{1}{8} > 0$ よって $p = \frac{1}{2}$ ■



2 (1) 与えられた漸化式

$$(*) \begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を変形すると、ともに

$$a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - sta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これが $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ に一致するから

$$s+t=1, \quad st=-3 \quad \dots (**)$$

s, t を解とする 2 次方程式は $x^2 - x - 3 = 0$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$s > t \text{ であるから} \quad s = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad t = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 1$ および (*), (**) より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - sa_n &= t^{n-1}(a_2 - sa_1) = t^{n-1}(1 - s) = t^n \\ a_{n+1} - ta_n &= s^{n-1}(a_2 - ta_1) = s^{n-1}(1 - t) = s^n \end{aligned}$$

上の 2 式から ($s \neq t$)

$$(s-t)a_n = s^n - t^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{s^n - t^n}{s-t}$$

これに (1) の結果を代入すると

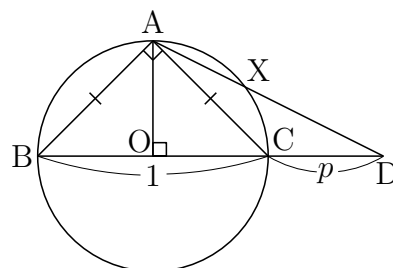
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n \right\}$$



- 3 (1) 点DはBCを $(p+1):p$ に外分する点であるから、右の図から

$$OC:OD = \frac{1}{2} : \left(p + \frac{1}{2}\right) = 1 : (2p+1)$$

$$\text{よって } \vec{OD} = (2p+1)\vec{OC}$$



- (2) 点Xは、線分AD上の点であるから

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OD} \quad (0 < t < 1) \\ &= (1-t)\vec{OA} + t(2p+1)\vec{OC} \end{aligned}$$

$\vec{OA} \perp \vec{OC}$ であるから、 $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$ より

$$|\vec{OX}|^2 = (1-t)^2|\vec{OA}|^2 + t^2(2p+1)^2|\vec{OC}|^2$$

$|\vec{OX}| = |\vec{OA}| = |\vec{OC}| \neq 0$ であるから

$$1 = (1-t)^2 + t^2(2p+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad t\{(2p^2+2p+1)t-1\} = 0$$

$$0 < t < 1 \text{ より} \quad t = \frac{1}{2p^2+2p+1}, \quad 1-t = \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}$$

$$\text{よって } \vec{OX} = \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\vec{OA} + \frac{2p+1}{2p^2+2p+1}\vec{OC}$$

- 4 (1) 図のS地点から A_1 地点への経路の総数は

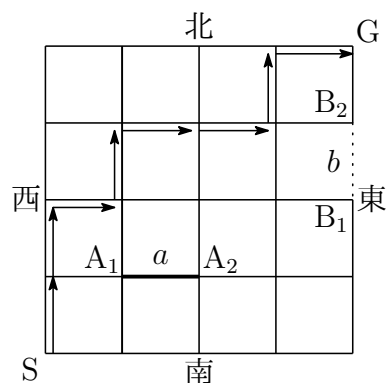
$$\frac{2!}{1!1!} = 2 \quad (\text{通り})$$

図の A_2 地点からG地点への経路の総数は

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \quad (\text{通り})$$

よって、求める経路の総数は

$$2 \times 10 = \mathbf{20} \quad (\text{通り})$$



(2) a , b を通り抜ける事象を, それぞれ A , B とする.

b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(B)$ とすると

$$n(B) = \frac{6!}{4!2!} \times 1 = 15 \quad (\text{通り})$$

a と b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow A_1, A_2 \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(A \cap B)$ とすると

$$n(A \cap B) = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

a を通り抜けずに b を通り抜ける経路の総数を $n(\bar{A} \cap B)$ とすると

$$n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9 \quad (\text{通り})$$

(3) a を通り抜ける経路の総数を $n(A)$ とすると, (1)の結果から $n(A) = 20$
 a を通り b を通り抜けいない経路の総数を $n(A \cap \bar{B})$ とすると

$$n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14 \quad (\text{通り})$$

a または b を通り抜ける経路の総数を $n(A \cup B)$ とすると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29 \quad (\text{通り})$$

すべての経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U) = \frac{8!}{4!4!} = 70 \quad (\text{通り})$$

a も b も通り抜けない経路の総数を $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ とすると

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 29 = 41 \quad (\text{通り})$$

S から G に到達するまでの時間 X とその確率 P は

$$(i) \quad A \cap B \text{ のとき} \quad X = 2 \times 6 + 1 + 8 = 21, \quad P = \frac{6}{70}$$

$$(ii) \quad \bar{A} \cap B \text{ のとき} \quad X = 2 \times 7 + 8 = 22, \quad P = \frac{9}{70}$$

$$(iii) \quad A \cap \bar{B} \text{ のとき} \quad X = 2 \times 7 + 1 = 15, \quad P = \frac{14}{70}$$

$$(iv) \quad \bar{A} \cap \bar{B} \text{ のとき} \quad X = 2 \times 8 = 16, \quad P = \frac{41}{70}$$

よって, 求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 21 \cdot \frac{6}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 15 \cdot \frac{14}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} \\ &= 15 + \frac{6 \cdot 6 + 7 \cdot 9 + 1 \cdot 41}{70} = 17 \quad (\text{分}) \end{aligned}$$

