平成 25 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 $f(x) = \sqrt{2}\sin x\cos x + \sin x + \cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とする．

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ．

(2) t の取り得る値の範囲を求めよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

2 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある．2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする．

(i) X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く．

(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く．

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く．

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする．

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ．

(2) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ．

(3) 2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ．

3 空間ベクトル $\vec{a} = (1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を考える．$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ で，$\vec{b}$ は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする．また，$\vec{a}\cdot\vec{b} = p$ とおく．

(1) $|\vec{p}| < 1$ であることを示せ．また，p を用いて $\vec{b}$ の成分を書け．

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり，

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{d} = p$$

をみたすとする．$\vec{c}$ の z 成分が正のとき，p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示を書け．

(3) 上の条件に加えて $\vec{c}\cdot\vec{d} = p$ であるとき p の値を求めよ．

4 実数 t が $0 \leqq t < 8$ をみたすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える．

(1) 点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ．

(2) (1) での 2 本の接線の接点を Q および R とする．線分 PQ，PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

解答例

1 (1) $t=\sin x+\cos x$ より

$$t^2=1+2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

よって $\quad f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{t^2-1}{2}+t=\boldsymbol{\frac{t^2}{\sqrt{2}}+t-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad 0\leqq x\leqq 2\pi$ より $\quad \boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(3) $g(t)=f(x)$ とおくと $\quad g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

最大値 $g(\sqrt{2})=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，最小値 $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}$ のとき，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ より $\quad x=\dfrac{\pi}{4}$

$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ より $\quad x=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$

よって $\quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$ **で最大値** $\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{x=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi}$ **で最小値** $\boldsymbol{-\frac{3}{4}\sqrt{2}}$ ■

2 (1) 2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を 4 で割った余りから

(i) 点 P が x 軸方向に -1 動く確率は $\dfrac{15}{36}$

(ii) 点 P が y 軸方向に -1 動く確率は $\dfrac{5}{36}$

(iii) 点 P が x 軸方向に $+1$ 動く確率は $\dfrac{12}{36}$

(iv) 点 P が y 軸方向に $+1$ 動く確率は $\dfrac{4}{36}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

よって，求める確率は $\quad \dfrac{12}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) よって，求める確率は $\quad \dfrac{4}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(3) 3 回投げて，(iii) が 2 回，(iv) が 1 回起こる確率であるから

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{12}{36}\right)^2\cdot\frac{4}{36}=3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{27}}$$

■

3 (1) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$．$\vec{b}$ は xy 平面上にあるから，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ 0)$ とおく $(b_2>0)$．

$|\vec{b}|^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ より　${b_1}^2+{b_2}^2=1$，$b_1=p$　ゆえに　$b_2=\sqrt{1-p^2}$

$b_2>0$ であるから

$$1-p^2>0 \quad \text{ゆえに} \quad |p|<1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{b}=(p,\ \sqrt{1-p^2},\ 0)}$$

(2) $\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とおくと $(c_3>0)$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=p$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=p$，$|\vec{c}|^2=1$ より

$$c_1=p, \quad c_1p+c_2\sqrt{1-p^2}=p, \quad {c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2=1 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$p^2+c_2\sqrt{1-p^2}=p \quad \text{ゆえに} \quad c_2=\frac{p-p^2}{\sqrt{1-p^2}}=p\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

$c_1=p$ および上式を $(*)$ 第 3 式に代入すると

$$p^2+\frac{p^2(1-p)}{1+p}+{c_3}^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad {c_3}^2=\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

$c_3>0$ であるから　$\boldsymbol{\vec{c}=\left(p,\ p\sqrt{\frac{1-p}{1+p}},\ \sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}}\right)}$

$\vec{d}=(d_1,\ d_2,\ d_3)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{d}=p$，$\vec{b}\cdot\vec{d}=p$，$|\vec{d}|^2=1$ であるから，同様の計算により

$$d_1=p, \quad d_2=p\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, \quad {d_3}^2=\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

条件により，$\vec{c}\neq\vec{d}$ であるから

$$\boldsymbol{\vec{d}=\left(p,\ p\sqrt{\frac{1-p}{1+p}},-\sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}}\right)}$$

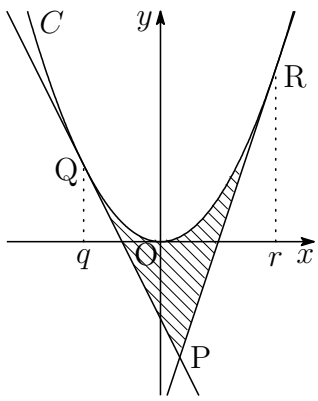
(3) (2) の結果を $\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ に代入すると

$$p^2+\frac{p^2(1-p)}{1+p}-\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}=p$$

整理すると　$3p^2-2p-1=0$　ゆえに　$(p-1)(3p+1)=0$

$|p|<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{p=-\frac{1}{3}}$　■

4 (1) 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線は，$y' = 2x$ より



$$y - q^2 = 2q(x - q) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2qx - q^2$$

同様に C 上の点 $\mathrm{R}(r,\ r^2)$ における接線は

$$y = 2rx - r^2$$

上の 2 式から，上の 2 接線の交点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{q+r}{2},\ qr\right)$$

$\mathrm{P}(t,\ t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ であるから $(0 \leqq t < 8)$

$$q + r = 2t, \quad qr = t^3 - 8t^2 + 15t - 56 \qquad \cdots (*)$$

$q,\ r$ を解とする x に関する 2 次方程式は

$$x^2 - 2tx + t^3 - 8t^2 + 15t - 56 = 0 \qquad \cdots (**)$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-t)^2 - (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 56 \\ &= (8 - t)(t^2 - t + 7) = (8 - t)\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}\right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって，2 次方程式 $(**)$ は異なる 2 つの実数解 $q,\ r$ をもつ $(q < r)$，すなわち，点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける．

(2) $S(t)$ は，上の図の斜線部分の面積であるから，$t = \dfrac{q+r}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_q^t \{x^2 - (2qx - q^2)\}\,dx + \int_t^r \{x^2 - (2rx - r^2)\}\,dx \\ &= \int_q^t (x - q)^2\,dx + \int_t^r (x - r)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - q)^3\right]_q^t + \left[\frac{1}{3}(x - r)^3\right]_t^r \\ &= \frac{1}{3}(t - q)^3 - \frac{1}{3}(t - r)^3 \\ &= \frac{1}{24}(r - q)^3 + \frac{1}{24}(r - q)^3 = \frac{1}{12}(r - q)^3 \end{aligned}$$

$(*)$ より $\quad (r-q)^2 = (q+r)^2 - 4qr$

$$= (2t)^2 - 4(t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$$

$$= 4(8-t)(t^2 - t + 7)$$

ゆえに $\quad r - q = 2\sqrt{(8-t)(t^2-t+7)}$

よって $\quad S(t) = \dfrac{1}{12}\{2\sqrt{(8-t)(t^2-t+7)}\}^3$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\{(8-t)(t^2-t+7)\}^{\frac{3}{2}}}$$

補足 $S(t) = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}$ である[1]. ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照