

平成25年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

1 $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) とする.

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおき, $f(x)$ を t の関数で表せ.
- (2) t の取り得る値の範囲を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.

2 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある. 2個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする.

- (i) X が4の倍数ならば, 点 P は x 軸方向に -1 動く.
- (ii) X を4で割った余りが1ならば, 点 P は y 軸方向に -1 動く.
- (iii) X を4で割った余りが2ならば, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.
- (iv) X を4で割った余りが3ならば, 点 P は y 軸方向に $+1$ 動く.

たとえば, 2と5が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を4で割った余りが2であるから, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.

以下のいずれの問題でも, 点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする.

- (1) 2個のサイコロを1回投げて, 点 P が $(1, 0)$ にある確率を求めよ.
- (2) 2個のサイコロを1回投げて, 点 P が $(0, 1)$ にある確率を求めよ.
- (3) 2個のサイコロを3回投げて, 点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ.

3 空間ベクトル $\vec{a} = (1, 0, 0)$, \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} を考える. $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ で, \vec{b} は xy 平面上にあり, その y 成分は正とする. また, $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とおく.

- (1) $|p| < 1$ であることを示せ. また, p を用いて \vec{b} の成分を書け.
- (2) \vec{c} と \vec{d} は相異なり,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = p$$

をみたすとする. \vec{c} の z 成分が正のとき, p を用いて \vec{c} と \vec{d} の成分表示を書け.

- (3) 上の条件に加えて $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ であるとき p の値を求めよ.

4 実数 t が $0 \leq t < 8$ をみたすとき, 点 $P(t, t^3 - 8t^2 + 15 - 56)$ を考える.

- (1) 点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ.
- (2) (1) での 2 本の接線の接点を Q および R とする. 線分 PQ , PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ.

解答例

1 (1) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad f(x) &= \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + t = \frac{t^2}{\sqrt{2}} + t - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(2) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$ より $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(3) $g(t) = f(x)$ とおくと $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$$\text{最大値 } g(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad \text{最小値 } g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき, } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \text{ より } x = \frac{\pi}{4}$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき, } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \text{ より } x = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

$$\text{よって } x = \frac{\pi}{4} \text{ で最大値 } \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad x = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3}{4}\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

2 (1) 2個のサイコロを同時に投げて出た目の積を4で割った余りから

(i) 点Pが x 軸方向に -1 動く確率は $\frac{15}{36}$

(ii) 点Pが y 軸方向に -1 動く確率は $\frac{5}{36}$

(iii) 点Pが x 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{12}{36}$

(iv) 点Pが y 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{4}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

(2) よって, 求める確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(3) 3回投げて, (iii)が2回, (iv)が1回起こる確率であるから

$${}_3C_2 \left(\frac{12}{36} \right)^2 \cdot \frac{4}{36} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \quad \blacksquare$$

3 (1) $\vec{a} = (1, 0, 0)$. \vec{b} は xy 平面上にあるから, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ とおく ($b_2 > 0$).

$$|\vec{b}|^2 = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = p \text{ より } b_1^2 + b_2^2 = 1, b_1 = p \text{ ゆえに } b_2 = \sqrt{1-p^2}$$

$b_2 > 0$ であるから

$$1-p^2 > 0 \text{ ゆえに } |p| < 1 \text{ よって } \vec{b} = (p, \sqrt{1-p^2}, 0)$$

(2) $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とおくと ($c_3 > 0$), $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = p$, $|\vec{c}|^2 = 1$ より

$$c_1 = p, \quad c_1 p + c_2 \sqrt{1-p^2} = p, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (*)$$

(*) の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$p^2 + c_2 \sqrt{1-p^2} = p \text{ ゆえに } c_2 = \frac{p-p^2}{\sqrt{1-p^2}} = p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

$c_1 = p$ および上式を (*) 第 3 式に代入すると

$$p^2 + \frac{p^2(1-p)}{1+p} + c_3^2 = 1 \text{ ゆえに } c_3^2 = \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

$$c_3 > 0 \text{ であるから } \vec{c} = \left(p, p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, \sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}} \right)$$

$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{d} = p$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = p$, $|\vec{d}|^2 = 1$ であるから, 同様の計算により

$$d_1 = p, \quad d_2 = p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, \quad d_3^2 = \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

条件により, $\vec{c} \neq \vec{d}$ であるから

$$\vec{d} = \left(p, p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, -\sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}} \right)$$

(3) (2) の結果を $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ に代入すると

$$p^2 + \frac{p^2(1-p)}{1+p} - \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p} = p$$

整理すると $3p^2 - 2p - 1 = 0$ ゆえに $(p-1)(3p+1) = 0$

$|p| < 1$ に注意して, これを解くと $p = -\frac{1}{3}$ ■

- 4 (1) 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $Q(q, q^2)$ における接線は, $y' = 2x$ より

$$y - q^2 = 2q(x - q) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2qx - q^2$$

同様に C 上の点 $R(r, r^2)$ における接線は

$$y = 2rx - r^2$$

上の2式から, 上の2接線の交点 P の座標は

$$P\left(\frac{q+r}{2}, qr\right)$$

$P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ であるから ($0 \leq t < 8$)

$$q + r = 2t, \quad qr = t^3 - 8t^2 + 15t - 56 \quad \dots (*)$$

q, r を解とする x に関する2次方程式は

$$x^2 - 2tx + t^3 - 8t^2 + 15t - 56 = 0 \quad \dots (**)$$

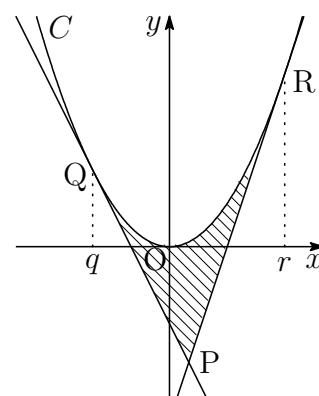
この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-t)^2 - (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 56 \\ &= (8-t)(t^2 - t + 7) = (8-t) \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって, 2次方程式(**)は異なる2つの実数解 q, r をもつ ($q < r$), すなわち, 点 P から放物線 $y = x^2$ に2本の異なる接線が引ける.

- (2) $S(t)$ は, 上の図の斜線部分の面積であるから, $t = \frac{q+r}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_q^t \{x^2 - (2qx - q^2)\} dx + \int_t^r \{x^2 - (2rx - r^2)\} dx \\ &= \int_q^t (x - q)^2 dx + \int_t^r (x - r)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - q)^3 \right]_q^t + \left[\frac{1}{3}(x - r)^3 \right]_t^r \\ &= \frac{1}{3}(t - q)^3 - \frac{1}{3}(t - r)^3 \\ &= \frac{1}{24}(r - q)^3 + \frac{1}{24}(r - q)^3 = \frac{1}{12}(r - q)^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (*) \text{ より} \quad (r - q)^2 &= (q + r)^2 - 4qr \\
 &= (2t)^2 - 4(t^3 - 8t^2 + 15t - 56) \\
 &= 4(8 - t)(t^2 - t + 7)
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad r - q = 2\sqrt{(8 - t)(t^2 - t + 7)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad S(t) &= \frac{1}{12} \{2\sqrt{(8 - t)(t^2 - t + 7)}\}^3 \\
 &= \frac{2}{3} \{(8 - t)(t^2 - t + 7)\}^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

補足 $S(t) = \frac{1}{3} \Delta PQR$ である¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun-2009.pdf 4 を参照