平成24年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護・作業]))

1 $m>0$，$n>0$，$0<x<1$とする．$\triangle$OABの辺OAを$m:n$に内分する点をP，辺OBを$n:m$に内分する点をQとする．また，線分AQを$1:x$に外分する点をS，線分BPを$1:x$に外分する点をTとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$m$，$n$，$x$で表せ．

(2) 3点O，S，Tが一直線上にあるとき，xをm，nで表せ．

2 $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$で定義された関数

$$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$$

を考える．

(1) $x=\sin\theta$とおく．$f(\theta)$をxで表せ．

(2) $f(\theta)$の最大値と最小値，およびそのときのθの値を求めよ．

3 xy平面上に3点A$(a,\ b)$，B$(a+3,\ b)$，C$(a+1,\ b+2)$がある．不等式$y\geq x^2$の表す領域をD，不等式$y\leqq x^2$の表す領域をEとする．

(1) 点Cが領域Dに含まれ，点Aと点Bが領域Eに含まれるようなa，bの条件を連立不等式で表せ．

(2) (1)で求めた条件を満たす点$(a,\ b)$の領域Fをab平面上に図示せよ．

(3) (2)で求めた領域Fの面積を求めよ．

4 AとBの2チームが試合を行い，どちらかが先にk勝するまで試合を繰り返す．各試合でAが勝つ確率をp，Bが勝つ確率をqとし，$p+q=1$とする．AがBより先にk勝する確率をP_kとおく．

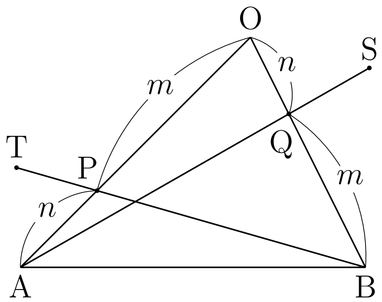
(1) P_2をpとqで表せ．

(2) P_3をpとqで表せ．

(3) $\dfrac{1}{2}<q<1$のとき，$P_3<P_2$であることを示せ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$



S は AQ を $1:x$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{1-x}\left(-x\vec{a}+\frac{n}{m+n}\vec{b}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ の m と n，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を入れ替えたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{1-x}\left(\frac{m}{m+n}\vec{a}-x\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ であるから $(0<x<1)$

$$-x:\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}:(-x)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=\frac{\sqrt{mn}}{m+n}}$$

■

2 (1) $f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$
$$=4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta+3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta$$
$$=-8\sin^3\theta-6\sqrt{2}\sin^2\theta+3\sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{=-8x^3-6\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$-1\leqq x\leqq 1$．$g(x)=f(\theta)$ とおくと

$$g(x)=-8x^3-6\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}$$
$$g'(x)=-24x^2-6\sqrt{2}x=-24x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって，$g(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$8-3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8-3\sqrt{2}$

$g(0)-g(-1)=3\sqrt{2}-(8-3\sqrt{2})=2(3\sqrt{2}-4)=2(\sqrt{18}-4)>0$

よって　$x=0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=0}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

　　　　$x=1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-8-3\sqrt{2}}$

■

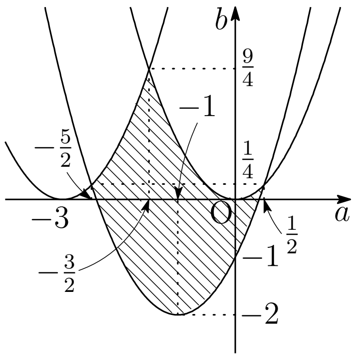
3 (1) 点 $\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ は領域 $D: y \geqq x^2$ に含まれるから

$$b+2 \geqq (a+1)^2$$

ゆえに　$b \geqq (a+1)^2-2 \quad \cdots①$

2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$ は $E: y \leqq x^2$ に含まれるから

$$b \leqq a^2 \quad \cdots②, \quad b \leqq (a+3)^2 \quad \cdots③$$



(2) F は，①〜③ を同時に満たす右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(3) 求める領域 F の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} [(a+3)^2 - \{(a+1)^2-2\}]\,da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} [a^2 - \{(a+1)^2-2\}]\,da \\
&= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} 4\left(a+\frac{5}{2}\right)da - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\left(a+\frac{1}{2}\right)da \\
&= \left[\,2\left(a+\frac{5}{2}\right)^2\,\right]_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} - \left[\,\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\,\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{6}
\end{aligned}$$

■

4 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は，1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2\mathrm{C}_1 pq)p = \boldsymbol{p^2(1+2q)}$$

(2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は，2 勝 0 敗，2 勝 1 敗，2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3\mathrm{C}_1 p^2 q + {}_4\mathrm{C}_2 p^2 q^2)p = \boldsymbol{p^3(1+3q+6q^2)}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{P_2-P_3}{p^2} &= 1+2q-p(1+3q+6q^2) \\
&= 1+2q-(1-q)(1+3q+6q^2) \\
&= 3q^2(2q-1)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < q < 1$ より，$2q-1>0$ であるから

$$P_2 - P_3 > 0 \quad よって \quad P_3 < P_2$$

■