平成24年度　北海道大学２次試験前期日程 (数学問題)90分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 $m>0$，$n>0$，$0<x<1$ とする．△OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P，辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする．また，線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S，線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n，x で表せ．

(2) 3 点 O，S，T が一直線上にあるとき，x を m，n で表せ．

2 $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$$

を考える．

(1) $x=\sin\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x で表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

3 xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$，$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある．不等式 $y\geqq x^2$ の表す領域を D，不等式 $y\leqq x^2$ の表す領域を E とする．

(1) 点 C が領域 D に含まれ，点 A と点 B が領域 E に含まれるような a，b の条件を連立不等式で表せ．

(2) (1) で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ．

(3) (2) で求めた領域 F の面積を求めよ．

4 A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく．

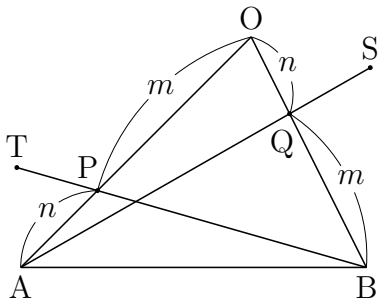
(1) P_2 を p と q で表せ．

(2) P_3 を p と q で表せ．

(3) $\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{n}{m+n}\vec{b}$



S は AQ を $1:x$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{1-x}\left(-x\vec{a} + \frac{n}{m+n}\vec{b}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ の m と n，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を入れ替えたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{m}{m+n}\vec{a} - x\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} // \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ であるから $(0 < x < 1)$

$$-x : \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n} : (-x) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{\sqrt{mn}}{m+n}}$$

■

2 (1)
$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta \\ &= 4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta + 3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta) - 4\sin\theta \\ &= -8\sin^3\theta - 6\sqrt{2}\sin^2\theta + 3\sqrt{2} \\ &= \boldsymbol{-8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$．$g(x) = f(\theta)$ とおくと

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$$
$$g'(x) = -24x^2 - 6\sqrt{2}x = -24x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって，$g(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$8-3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8-3\sqrt{2}$

$$g(0) - g(-1) = 3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2} - 4) = 2(\sqrt{18} - 4) > 0$$

よって　$x = 0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-8 - 3\sqrt{2}}$

■

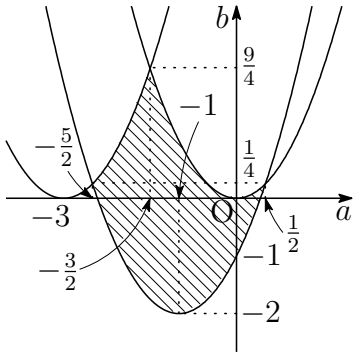
3 (1) 点 $\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ は領域 $D : y \geqq x^2$ に含まれるから

$$b+2 \geqq (a+1)^2$$

ゆえに　$b \geqq (a+1)^2 - 2 \quad \cdots ①$

2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$ は $E : y \leqq x^2$ に含まれるから

$$b \leqq a^2 \quad \cdots ②, \quad b \leqq (a+3)^2 \quad \cdots ③$$



(2) F は，①〜③ を同時に満たす右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(3) 求める領域 F の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} [(a+3)^2 - \{(a+1)^2 - 2\}]\, da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} [a^2 - \{(a+1)^2 - 2\}]\, da \\ &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} 4\left(a + \frac{5}{2}\right) da - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\left(a + \frac{1}{2}\right) da \\ &= \left[\, 2\left(a + \frac{5}{2}\right)^2 \,\right]_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} - \left[\, \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \,\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{6} \end{aligned}$$

■

4 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は，1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2\mathrm{C}_1 pq)p = \boldsymbol{p^2(1+2q)}$$

(2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は，2 勝 0 敗，2 勝 1 敗，2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3\mathrm{C}_1 p^2 q + {}_4\mathrm{C}_2 p^2 q^2)p = \boldsymbol{p^3(1+3q+6q^2)}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{P_2 - P_3}{p^2} &= 1 + 2q - p(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 1 + 2q - (1-q)(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 3q^2(2q - 1) \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2} < q < 1$ より，$2q - 1 > 0$ であるから

$$P_2 - P_3 > 0 \quad \text{よって} \quad P_3 < P_2$$

■