# 平成 23 年度　北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
## 文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護・作業]))

**1** 実数 $x$ に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 $k$ を $[x]$ で表す．たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である．

(1) $n^2-5n+5<0$ を満たす整数 $n$ をすべて求めよ．

(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 $x$ の範囲を求めよ．

(3) $x$ は (2) で求めた範囲にあるものとする．$x^2-5[x]+5=0$ を満たす $x$ をすべて求めよ．

**2** $a$ を正の実数，$b$ と $c$ を実数とし，2 点 P$(-1,\ 3)$，Q$(1,\ 4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を $C$ とおく．$C$ 上の 2 点 P，Q における $C$ の接線をそれぞれ $l_1$，$l_2$ とする．

(1) $b$ の値を求め，$c$ を $a$ で表せ．

(2) $l_1$ と $l_2$ の交点の座標を $a$ で表せ．

(3) 放物線 $C$ と接線 $l_1$，$l_2$ で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような $a$ の値を求めよ．

**3** $a$，$b$ を実数とし，$xy$ 平面上の 3 直線を $l: x+y=0$，$l_1: ax+y=2a+2$，$l_2: bx+y=2b+2$ で定める．

(1) 直線 $l_1$ は $a$ の値によらない 1 点 P を通る．P の座標を求めよ．

(2) 直線 $l$，$l_1$，$l_2$ によって三角形がつくられるための $a$，$b$ の条件を求めよ．

(3) $a$，$b$ は (2) で求めた条件を満たすものとする．点 $(1,\ 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような $a$，$b$ の範囲を求め，それを $ab$ 平面上に図示せよ．

$\boxed{4}$ $n$ を 2 以上の自然数，$q$ と $r$ を自然数とする．1 から $nq$ までの番号がついた $nq$ 個の白玉，1 から $nr$ までの番号がついた $nr$ 個の赤玉を用意する．これら白玉と赤玉を，1 番から $n$ 番まで番号づけられた $n$ 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は $q$ 個ずつ，赤玉は $r$ 個ずつ配分しておく．たとえば，1 番の箱には番号 1 から $q$ の白玉と番号 1 から $r$ の赤玉が入っている．これら $n(q+r)$ 個の玉を $n$ 個の箱に以下のように再配分する．1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す．同様の操作を順次繰り返し最後に $n$ 番の箱に 1 個の玉を移して終了する．このようにして実現され得る再配分の総数を $s_n$ とし，$n$ 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を $a_n$ とする．

(1) $s_2$ を求めよ．

(2) $s_3$ と $a_3$ を求めよ．

(3) $s_4$ と $a_4$ を求めよ．

解答例

**1** (1) $n^2-5n+5<0$ より $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ $\cdots(*)$

このとき $1=\dfrac{5-\sqrt{9}}{2}<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{5-\sqrt{4}}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$\frac{7}{2}=\frac{5+\sqrt{4}}{2}<\frac{5+\sqrt{5}}{2}<\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

よって，$(*)$ を満たす自然数 $n$ は **2，3**

別解 $f(n)=n^2-5n+5=\left(n-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ とおくと

$f(2)=f(3)=-1<0$，$f(1)=f(4)=1>0$

$f(n)<0$ を満たす自然数 $n$ は **2，3**

(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ について，(1) の結果を利用して $[x]=2,\ 3$

ゆえに $[x]=2$ のとき $2\leqq x<3$，$[x]=3$ のとき $3\leqq x<4$

よって $\boldsymbol{2\leqq x<4}$

(3) (2) の結果から，$2\leqq x<4$ における方程式 $x^2-5[x]+5=0$ の解を求める．

(i) $2\leqq x<3$ のとき，$[x]=2$ であるから

$$x^2-5=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

$2\leqq x<3$ より，$x=\sqrt{5}$

(ii) $3\leqq x<4$ のとき，$[x]=3$ であるから

$$x^2-10=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm\sqrt{10}$$

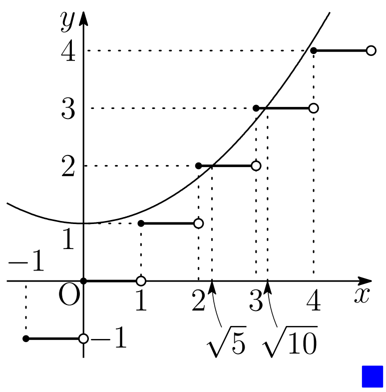
$3\leqq x<4$ より，$x=\sqrt{10}$

よって $\boldsymbol{x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}}$

補足 $x^2-5[x]+5=$ の解は，$\dfrac{1}{5}x^2+1=[x]$ より

$$y=\frac{1}{5}x^2+1, \quad y=[x]$$

のグラフの交点の $x$ 座標である．



**2** (1) $C: y = ax^2 + bx + c$ 上に 2 点 P$(-1,\ 3)$，Q$(1,\ 4)$ があるから

$$a - b + c = 3, \quad a + b + c = 4$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{b = \frac{1}{2},\ \ c = -a + \frac{7}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C: y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - a$　ゆえに　$y' = 2ax + \frac{1}{2}$

$C$ 上の点 P$(-1,\ 3)$ における接線 $l_1$ の方程式は

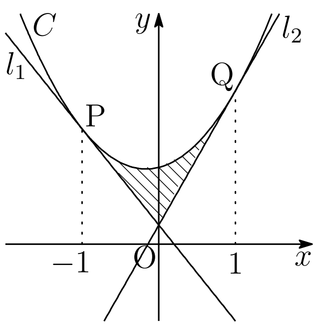
$$y - 3 = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

$C$ 上の点 Q$(1,\ 4)$ における接線 $l_2$ の方程式は

$$y - 4 = \left(2a + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

$l_1$，$l_2$ の方程式から，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(0,\ \ -2a + \frac{7}{2}\right)}$

(3) $C$ と $l_1$，$y$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_1$ とし，
$C$ と $l_2$，$y$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_2$ とする．




$$S_1 = a\int_{-1}^{0}(x + 1)^2\,dx = a\left[\frac{1}{3}(x + 1)^3\right]_{-1}^{0} = \frac{a}{3},$$

$$S_2 = a\int_{0}^{1}(x - 1)^2\,dx = a\left[\frac{1}{3}(x - 1)^3\right]_{0}^{1} = \frac{a}{3}$$

$S_1 + S_2 = 1$ であるから　$\frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$

**補足** $C$ と直線 PQ で囲まれた図形の面積を $S_0$ とすると，$C$ の $x^2$ の係数 $a$ および 2 点 P，Q の $x$ 座標から

$$S_0 = \frac{a}{6}(1 + 1)^3 = \frac{4}{3}a$$

このとき，$C$ と $l_1$，$l_2$ で囲まれた図形の面積[1] は　$\frac{1}{2}S_0 = \frac{2}{3}a$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $l_1 : ax + y = 2a + 2$ より　$y = -a(x-2) + 2$

したがって，$l_1$ は，点 $(2,\ 2)$ を通り，傾き $-a$ の直線である．
よって，求める点 P の座標は　　$\mathbf{(2,\ 2)}$

別解 $l_1 : ax + y = 2a + 2$ より　$(x-2)a + y - 2 = 0$

$a$ の値によらず，成立する恒等式であるから

$$x - 2 = 0,\quad y - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 2,\ y = 2$$

よって，求める点 P の座標は　　$\mathbf{(2,\ 2)}$

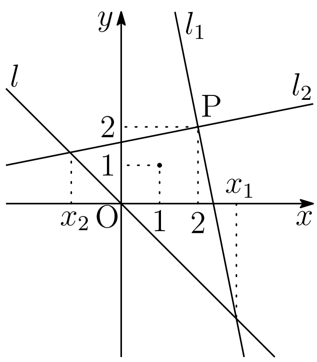
(2) (1) と同様に，$l_2 : bx + y = 2b + 2$ から　$y = -b(x-2) + 2$

したがって，$l_2$ は，点 $(2,\ 2)$ を通り，傾き $-b$ の直線である．
また，$l : x + y = 0$ $(y = -x)$ より，$l$ の傾きは $-1$ で，点 P を通らないことに注意すると，3 直線 $l,\ l_1,\ l_2$ によって三角形が作られるとき，これらの 3 直線は，互いに平行でないから

$$-a \neq -b \quad \text{かつ} \quad -a \neq -1 \quad \text{かつ} \quad -b \neq -1$$

よって　　$\boldsymbol{a \neq b,\ \ a \neq 1,\ \ b \neq 1}$

(3) $l : x + y = 0$，$l_1 : ax + y = 2a + 2$ の交点の $x$ 座標を $x_1$ とし，$l : x + y = 0$，$l_2 : bx + y = 2b + 2$ の交点の $x$ 座標を $x_2$ とすると，(2) の結果に注意して




$$x_1 = \frac{2(a+1)}{a-1},\quad x_2 = \frac{2(b+1)}{b-1}$$

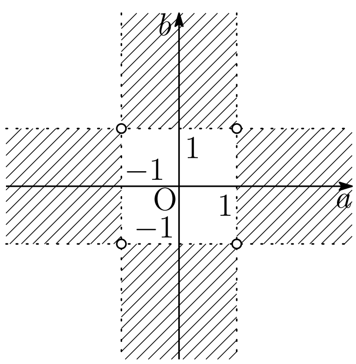
条件を満たすとき，$x_1x_2 < 0$ であるから

$$x_1x_2 = \frac{4(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)} < 0$$

したがって，$a$，$b$ の満たす不等式は

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1) < 0$$

よって，点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で境界線は含まない．




補足 $(a+1)(a-1) \leqq 0$ のとき $(b+1)(b-1) \geqq 0$　(複号同順)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 1 番目の箱から 2 番目の箱に玉を移す場合の総数であるから

$$\boldsymbol{s_2 = q + r}$$

(2) 2 番目の箱から 3 番目の箱に玉を移す場合の総数は $q + r + 1$ であるから，(1) の結果から

$$s_3 = s_2(p + q + 1) = \boldsymbol{(q + r)(q + r + 1)}$$

$a_3$ は，1 番目の箱から 2 番目の箱，さらに 2 番目の箱から 3 番目の箱に 1 個ずつ玉を移す 2 回の操作のうち，1 回目は白玉または赤玉を移し，2 回目は白玉が移る場合の総数である．

1 回目が白玉の場合の総数は　$q(q + 1)$

1 回目が赤玉の場合の総数は　$rq$

よって　　$a_3 = q(q + 1) + rq = \boldsymbol{q(q + r + 1)}$

(3) 3 番目の箱から 4 番目の箱に玉を移す場合の総数は $q + r + 1$ であるから，(2) の結果から

$$s_4 = s_3(p + q + 1) = \boldsymbol{(q + r)(q + r + 1)^2}$$

3 番目の箱の白玉が $q + 1$ 個となる場合の総数が $a_3$ 通りであるから，白玉が $q$ 個となる場合の総数が $(s_3 - a_3)$ 通りある．したがって

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3(q + 1) + (s_3 - a_3)q = a_3 + qs_3 \\ &= q(q + r + 1) + q\cdot(q + r)(q + r + 1) \\ &= \boldsymbol{q(q + r + 1)^2} \end{aligned}$$

■