

平成22年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 a を正の実数とし, 2つの放物線

$$C_1: y = x^2, \quad C_2: y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える.

- (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 2つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 A, B それぞれがさいころを1回ずつ投げる.

- (i) 同じ目が出たときはAの勝ちとし, 異なる目が出たときには大きい目を出した方の勝ちとする.
- (ii) p, q を自然数とする. Aが勝ったときは, Aが出した目の数の p 倍をAの得点とする. Bが勝ったときには, Bが出した目の数にAが出した目の数の q 倍を加えた合計をBの得点とする. 負けた者の得点は0とする.

Aの得点の期待値を E_A , Bの得点の期待値を E_B とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) E_A, E_B をそれぞれ p, q で表せ.
- (2) $E_A = E_B$ となる最小の自然数 p と, そのときの E_A の値を求めよ.

3 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を, 次のように奇数個ずつの群に分ける.

$$\begin{array}{ccc} \{a_1\}, & \{a_2, a_3, a_4\}, & \{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\} \\ \text{第1群} & \text{第2群} & \text{第3群} \end{array}$$

k を自然数として, 以下の問いに答えよ.

- (1) 第 k 群の最初の項を求めよ.
- (2) 第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ.
- (3) $(k^2 + 1)S_k \leq \frac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ.

4 直角三角形 ABC において、 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 、 $AB = 1$ であるとする。 $\angle B = \theta$ とおく。
点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし、点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。 AE
と CD の交点を F とする。

- (1) $\frac{DE}{AC}$ を θ で表せ。
- (2) $\triangle FEC$ の面積を θ で表せ。

解答例

1 (1) $C_1: y = x^2$ より $y' = 2x$

C_1 上の点 $P(p, p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この接線と C_2 の方程式から y を消去すると

$$x^2 - 4ax + 4a = 2px - p^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2(2a + p)x + 4a + p^2 = 0$$

この方程式は重解 $2a + p$ をもつから、係数について

$$D/4 = (2a + p)^2 - (4a + p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(p - 1 + a) = 0$$

$a > 0$ であるから $p = 1 - a$ これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$\ell: y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2) C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$2a + p = 2a + (1 - a) = 1 + a$$

C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると

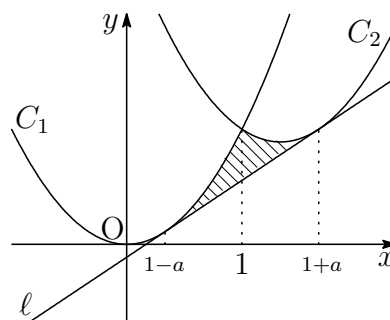
$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a$$

$$\text{ゆえに} \quad a(x - 1) = 0$$

$a > 0$ より、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は 1

求める面積は、右の図の斜線部分で、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-a}^1 (x - 1 + a)^2 dx + \int_1^{1+a} (x - 1 - a)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x - 1 + a)^3 \right]_{1-a}^1 + \frac{1}{3} \left[(x - 1 - a)^3 \right]_1^{1+a} = \frac{2}{3} a^3 \end{aligned}$$



2 (1) (i),(ii) により

$$\begin{aligned}
 E_A &= \frac{1}{6^2} \sum_{1 \leq b \leq a \leq 6} pa = \frac{p}{36} \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^a a = \frac{p}{36} \sum_{a=1}^6 a^2 \\
 &= \frac{p}{36} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = \frac{91p}{36} \\
 E_B &= \frac{1}{6^2} \sum_{1 \leq a < b \leq 6} (b + qa) = \frac{1}{36} \sum_{b=2}^6 \sum_{a=1}^{b-1} (b + qa) \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{b=2}^6 \{b(b-1) + q \cdot \frac{1}{2}(b-1)b\} = \frac{q+2}{72} \sum_{b=2}^6 b(b-1) \\
 &= \frac{q+2}{72} \sum_{b=1}^6 b(b-1) = \frac{q+2}{72} \sum_{b=1}^6 (b^2 - b) \\
 &= \frac{q+2}{72} \left(\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \right) = \frac{35(q+2)}{36}
 \end{aligned}$$

別解 A, B がそれぞれ勝ったときの得点は次のようになる.

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	p	$2+q$	$3+q$	$4+q$	$5+q$	$6+q$
2	$2p$	$2p$	$3+2q$	$4+2q$	$5+2q$	$6+2q$
3	$3p$	$3p$	$3p$	$4+3q$	$5+3q$	$6+3q$
4	$4p$	$4p$	$4p$	$4p$	$5+4q$	$6+4q$
5	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$6+5q$
6	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$

$$\begin{aligned}
 E_A &= \frac{p + 2p \cdot 2 + 3p \cdot 3 + 4p \cdot 4 + 5p \cdot 5 + 6p \cdot 6}{6^2} = \frac{91p}{36} \\
 E_B &= \frac{(2+q) + (3+q) + \cdots + (6+5q)}{6^2} = \frac{35(q+2)}{36}
 \end{aligned}$$

(2) $E_A = E_B$ より $91p = 35(q+2)$ ゆえに $13p = 5(q+2)$

p は 5 の倍数であるから, 最小の自然数 p は 5

このとき, (1) の結果から $E_A = \frac{91 \cdot 5}{36} = \frac{455}{36}$

■

3 (1) 第 k 群の最後の項の項数は

$$1 + 3 + 5 + \cdots (2k - 1) = \frac{1}{2}k\{1 + (2k - 1)\} = k^2$$

したがって、第 k 群の最後の項は a_{k^2}

よって、第 k 群の最初の項は

$$\begin{aligned} a_{(k-1)^2+1} &= a_{k^2-2k+2} = \frac{1}{(k^2 - 2k + 2)\{(k^2 - 2k + 2) + 1\}} \\ &= \frac{1}{(k^2 - 2k + 2)(k^2 - 2k + 3)} \end{aligned}$$

(2) $T_n = \sum_{j=1}^n a_j$ とすると

$$T_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$S_k = T_{k^2} - T_{(k-1)^2}$ であるから

$$\begin{aligned} S_k &= \left(1 - \frac{1}{k^2 + 1} \right) - \left\{ 1 - \frac{1}{(k-1)^2 + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{k^2 - 2k + 2} - \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{2k - 1}{(k^2 + 1)(k^2 - 2k + 2)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $(k^2 + 1)S_k = \frac{2k - 1}{k^2 - 2k + 2}$

$(k^2 + 1)S_k \leq \frac{1}{100}$ をみたすとき

$$\frac{2k - 1}{k^2 - 2k + 2} \leq \frac{1}{100} \quad \text{ゆえに} \quad k^2 - 202k + 102 \geq 0$$

したがって $(k - 101)^2 \geq 101^2 - 102$ (*)

ここで、 $101^2 - 100^2 = 201$ であるから $100^2 + 99 = 101^2 - 102$

ゆえに $100^2 < 101^2 - 102 < 101^2$

(*) を満たす最小の自然数 k は

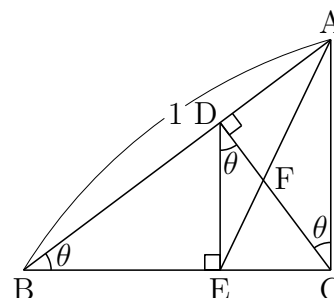
$$k - 101 = 101 \quad \text{よって} \quad k = 202$$



4 (1) 右の図において $\cos \theta = \frac{CD}{AC} = \frac{DE}{CD}$

$$\frac{CD}{AC} \cdot \frac{DE}{CD} = \cos^2 \theta$$

よって $\frac{DE}{AC} = \cos^2 \theta$



(2) $AC = \sin \theta$ であるから, (1) の結果より $DE = \sin \theta \cos^2 \theta$

$$\begin{aligned} \triangle CDE &= \frac{1}{2} DE \cdot CE = \frac{1}{2} DE \cdot DE \tan \theta = \frac{1}{2} DE^2 \tan \theta \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta \cos^2 \theta)^2 \tan \theta = \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos^3 \theta \end{aligned}$$

$\triangle FDE \sim \triangle FCA$ であるから, (1) の結果より $CF : FD = 1 : \cos^2 \theta$

よって $\triangle FEC = \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \triangle CDE = \frac{\sin^3 \theta \cos^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)}$ ■