

平成 21 年度 北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

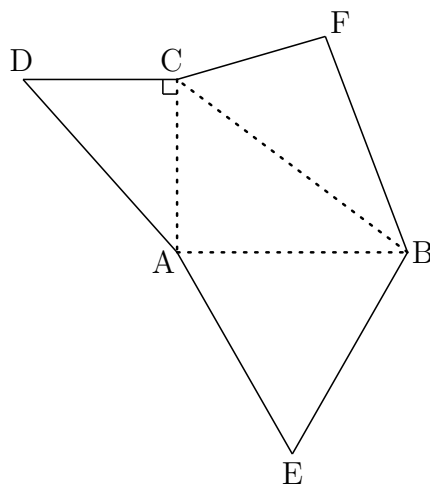
- 1 $\gamma = 1 + \sqrt{3}i$ とする. ただし, i は虚数単位である. 実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3} + 1)x + 16$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $P(\gamma) = 0$ となるように a と b を定めよ.
 - (2) (1) で定めた a と b に対して, $P(x) = 0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ.
- 2 座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ. $y = 3x^2 - 6x$ で表される放物線を C とする. n を自然数とし, C 上の点 $P(n, 3n^2 - 6n)$ をとる. 原点を $O(0, 0)$ とする. C と線分 OP で囲まれる図形を D とする. ただし, D は境界を含むとする. $0 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して, 直線 $x = k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) $f(k)$ を求めよ.
 - (2) D に含まれる格子点の総数を求めよ.
 - (3) $f(k)$ が最大となるような k を求めよ.
- 3 実数 $t > 0$ に対して, 座標平面上に点 $P(t, 0)$, 点 $Q(2t, 1 - 4t^2)$, 点 $R(-t, 1 - t^2)$ をとる. このとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ.
 - (2) (1) で求めた値を t_0 とする. $0 < t < t_0$ のとき, 三角形 $\triangle PQR$ の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ.

- 4 図はある三角錐 V の展開図である．ここで $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$, $\angle ACD = 90^\circ$ で $\triangle ABE$ は正三角形である．このとき, V の体積を求めよ．



解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \gamma = 1 + \sqrt{3}i \text{ より } (\gamma - 1)^2 = (\sqrt{3}i)^2 \quad \text{ゆえに } \gamma^2 - 2\gamma + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \gamma^3 + 8 = (\gamma + 2)(\gamma^2 - 2\gamma + 4) = 0 \quad \text{ゆえに } \gamma^3 = -8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \gamma^4 = \gamma^3 \cdot \gamma = -8\gamma, \quad \textcircled{1} \text{ より } \gamma^2 = 2\gamma - 4$$

上の結果を利用して

$$\begin{aligned} P(\gamma) &= \gamma^4 + a\gamma^3 + b\gamma^2 - 8(\sqrt{3} + 1)\gamma + 16 \\ &= -8\gamma - 8a + b(2\gamma - 4) - 8(\sqrt{3} + 1)\gamma + 16 \\ &= 2(b - 8 - 4\sqrt{3})\gamma - 4(2a + b - 4) \end{aligned}$$

$$P(\gamma) = 0 \text{ より } 2(b - 8 - 4\sqrt{3})\gamma - 4(2a + b - 4) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $b - 8 - 4\sqrt{3} \neq 0$ のとき、 $\textcircled{3}$ より

$$\gamma = \frac{2(2a + b - 4)}{b - 8 - 4\sqrt{3}}$$

このとき、上式の右辺は実数であるから、左辺 $1 + \sqrt{3}i$ に反する。

したがって、 $b - 8 - 4\sqrt{3} = 0 \dots \textcircled{4}$ となり、これを $\textcircled{3}$ に代入すると

$$2a + b - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } \quad \mathbf{a = -2(1 + \sqrt{3}), \quad b = 4(2 + \sqrt{3})}$$

(2) (1) の結果から

$$P(x) = x^4 - 2(1 + \sqrt{3})x^3 + 4(2 + \sqrt{3})x^2 - 8(1 + \sqrt{3})x + 16$$

$\textcircled{1}$ に注意して、 $P(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ることにより

$$P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)$$

したがって、 $P(x) = 0$ の解は $x = 1 \pm \sqrt{3}i, \sqrt{3} \pm i$

よって、求める解は $\mathbf{x = 1 - \sqrt{3}i, \sqrt{3} \pm i}$

補足 実係数の方程式が α を解に持つとき、その共役な複素数 $\bar{\alpha}$ もこの方程式の解である。本題では γ が方程式 $P(x) = 0$ の解であるから、 $\bar{\gamma}$ もこの方程式の解である¹。すなわち、 $P(x)$ は、

$$(x - \gamma)(x - \bar{\gamma}) = x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = x^2 - 2x + 4$$

を因数に持つ。 ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2012.pdf> 4 の補足を参照

- 2** (1) 2点 O, P($n, 3n^2 - 6n$) を通る直線の方程式は

$$y = \frac{3n^2 - 6n}{n}x \quad \text{すなわち} \quad y = (3n - 6)x$$

$x = k$ のとき, 直線 OP, 放物線 C の y 座標から

$$\begin{aligned} f(k) &= (3n - 6)k - (3k^2 - 6k) + 1 \\ &= -3k^2 + 3nk + 1 \end{aligned}$$

- (2) 求める格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f(k) &= \sum_{k=0}^n (-3k^2 + 3nk + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (-3k^2 + 3nk) + n + 1 \\ &= -3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\{-n(2n+1) + 3n^2 + 2\} \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

- (3) (1) の結果から $f(k) = -3\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 + 1$

よって, $f(k)$ が最大となる整数 k の値は

$$n \text{ が偶数のとき } k = \frac{n}{2}, \quad n \text{ が奇数のとき } k = \frac{n \pm 1}{2}$$



- 3** (1) $P(t, 0)$, $Q(2t, 1 - 4t^2)$, $R(-t, 1 - t^2)$ より

$$\overrightarrow{PQ} = (t, 1 - 4t^2), \quad \overrightarrow{PR} = (-2t, 1 - t^2)$$

P , Q , R が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR}$ であるから

$$t(1 - t^2) - (-2t)(1 - 4t^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t(1 - 3t^2) = 0$$

$$t > 0 \text{ に注意して, これを解くと} \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (2) $0 < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |t(1 - t^2) - (-2t)(1 - 4t^2)| = \frac{3}{2} |t(1 - 3t^2)| \\ &= \frac{3}{2} t(1 - 3t^2) = \frac{3}{2} (t - 3t^3) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad S'(t) = \frac{3}{2} (1 - 9t^2) = \frac{3}{2} (1 + 3t)(1 - 3t)$$

$S(t)$ の増減表は次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

よって, $S(t)$ は, $t = \frac{1}{3}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{3}$ をとる. ■

- 4 $\angle BAC = 90^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ を底面とし, V の高さを h とする.
頂点 E(D, F) から辺 AB に垂線 EH を引くと

$$AH = AE \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

このとき, $AH^2 + AC^2 + h^2 = AE^2$ であるから

$$2^2 + 3^2 + h^2 = 4^2 \quad \text{これを解いて} \quad h = \sqrt{3}$$

よって, 求める V の体積は $\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

解説 直交座標空間の原点を A, x 軸上に B, y 軸上に C をとり, V の高さが z 座標となるように z 軸をとる. AE と x 軸, y 軸, z 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α , β , γ とし, $r = AE$ とすると, 点 E の座標は $(r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma)$.
また, $AE^2 = r^2$ より, 次式が成立する.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \cdots (*)$$

$\alpha = 60^\circ$, $\cos \beta = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{4}$ を (*) に代入すると $|\cos \gamma| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ を得る.

したがって, V の高さは $r |\cos \gamma| = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ ■