

平成 20 年度 北海道大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護・作業]))

問題 1 2 3 4

- 1 xy 平面において, 放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ, $(a, 0)$ と $(a, -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を一辺とする長方形を考える. ただし, $0 < a < 3$ とする. このような長方形の面積を $S(a)$ とする.

- (1) $S(a)$ を a の式で表せ.
- (2) $S(a)$ の値が最大となる a の値を求め, 関数 $S(a)$ のグラフをかけ.

- 2 a を定数とする. xy 平面上の点の集合を $X(a)$, L を次のように定める.

$$X(a) = \left\{ (x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq \frac{(a + 1)^2}{4} \right\}$$

$$L = \{(x, y) \mid y = x - 1\}$$

- (1) $X(a) \cap L = \phi$ となるような a の値の範囲を求めよ. (ただし, ϕ は空集合を表す.)
- (2) いかなる実数 a に対しても $P \notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め, xy 平面上に図示せよ.

- 3 k を実数とし, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で数列 $\{a_n\}$ を定める.

- (1) $k = 2$ のとき, 一般項 a_n を求めよ.
- (2) すべての n について $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ を満たす α, β に対して, $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 1$ が成り立つことを示せ.
- (3) (2)において, 異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め, そのときの α と β の値を求めよ.

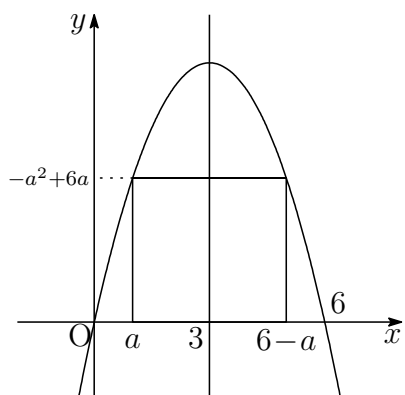
- 4 1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える.

- (1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ.
- (2) 出る目の最小値が 1 で, かつ最大値が 6 である確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$ より，放物線は直線 $x = 3$ に関して対称であるから，長方形の面積は右の図から

$$\begin{aligned} S(a) &= 2(3-a)(-a^2+6a) \\ &= 2(a^3 - 9a^2 + 18a) \end{aligned}$$

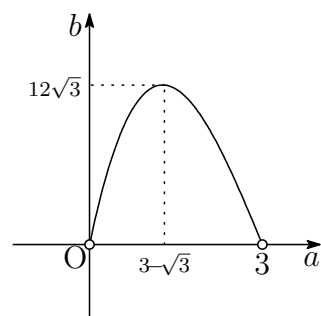


- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S'(a) &= 2(3a^2 - 18a + 18) \\ &= 6(a^2 - 6a + 6) \\ &= 6(a - 3 + \sqrt{3})(a - 3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$0 < a < 3$ より

a	(0)	...	$3 - \sqrt{3}$	...	(3)
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$	(0)	↗	極大	↘	(0)



$S(a)$ の値が最大となる a の値は $a = 3 - \sqrt{3}$

$S(a) = 2(3-a)\{-(3-a)^2 + 9\}$ であるから

$$S(3 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(-3 + 9) = 12\sqrt{3}$$

$S(a)$ のグラフは，右の図のようになる。



- 2** (1) 円 $(x-a)^2 + y^2 = \frac{(a+1)^2}{4}$ と直線 $x-y-1=0$ が共有点をもたない条件であるから、円の中心 $(a, 0)$ から直線までの距離が円の半径 $\frac{|a+1|}{2}$ より大きいときで

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}} > \frac{|a+1|}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 6a + 1 > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a < 3 - 2\sqrt{2}, \quad 3 + 2\sqrt{2} < a$$

- (2) いかなる実数 a に対しても $P \notin X(a)$ となるとき、任意の a に対して

$$(x-a)^2 + y^2 > \frac{(a+1)^2}{4}$$

これを a について整理すると

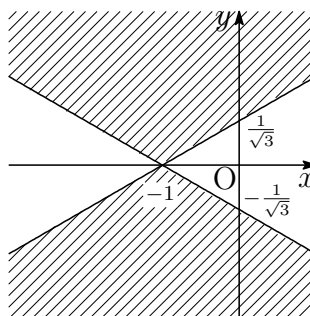
$$3a^2 - 2(4x+1)a + 4x^2 + 4y^2 - 1 > 0$$

すべての実数 a について、上式が成立するとき

$$(4x+1)^2 - 3(4x^2 + 4y^2 - 1) < 0$$

$$(x + \sqrt{3}y + 1)(x - \sqrt{3}y + 1) < 0$$

よって、求める領域は、下の図の斜線部分で境界線を含まない。



- 3** (1) $k = 2$ のとき $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ ゆえに $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$
 $\{a_n\}$ は, 初項 $a_1 = 0$, 公差 $a_2 - a_1 = 1$ の等差数列であるから

$$a_n = 0 + (n - 1) \cdot 1 = n - 1$$

- (2) $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ より $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$
 これと $a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n$ から a_{n+2} を消去すると

$$(\alpha + \beta - k)a_{n+1} + (1 - \alpha\beta)a_n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$n = 1$ を $\textcircled{1}$ に代入すると $\alpha + \beta - k = 0$ これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$(1 - \alpha\beta)a_n = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$n = 2$ を $\textcircled{2}$ に代入すると $1 - \alpha\beta = 0$ よって $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 1$

- (3) α, β を解とする 2 次方程式は $x^2 - kx + 1 = 0 \quad \cdots (*)$

2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad k < -2, 2 < k$$

$$(*) \text{ を解いて } \alpha = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \beta = \frac{k \mp \sqrt{k^2 - 4}}{2} \quad (\text{複合同順}) \quad \blacksquare$$

- 4** (1) 1の目が出る事象を A とすると

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{求める確率は} \quad P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$$

- (2) 6の目が出る事象を B とすると

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{ゆえに} \quad P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

1の目も6の目もない確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

$$\text{したがって} \quad P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left\{1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4\right\} \\ &= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{151}{648} \end{aligned}$$

