平成19年度　北海道大学2次試験前期日程(数学問題)90分
文系(文，教育，法，経済，医(保健[看護・作業]))

問題 1 2 3 4

1 $a,\ b$ を実数とする．方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が1以下であるとする．

(1) この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a+2b$ の最大値と最小値を求めよ．

2 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える．

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である2つの円は，どちらも円 C に接することを示せ．

(2) 点Pが円C上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ．

3 数1，2，3を重複を許して n 個並べてできる数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を考える．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,2,3$ とする．

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \text{ かつ } a_{n-1} > a_n$$

を満たす数列は何通りあるか．

4 $a>0$，$b \geqq 0$，$0<p<1$ とし，関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする．このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す．

(1) b を a と p を用いて表せ．

(2) a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき，C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする．

(i) x を固定して y の動く範囲を求めよ．

(ii) D を図示せよ．

(3) D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ．

解答例

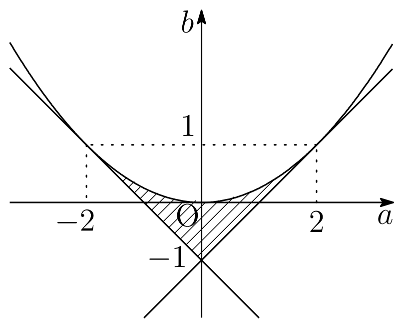
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2+ax+b$ とおくと　$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$

条件を満たすとき

$$b-\frac{a^2}{4}\leqq 0,\quad -1\leqq -\frac{a}{2}\leqq 1,$$
$$f(1)=a+b+1\geqq 0,\quad f(-1)=-a+b+1\geqq 0$$

したがって，点 $(a,\ b)$ の表す領域は

$$\begin{cases} b\leqq \dfrac{a^2}{4} \\ -2\leqq a\leqq 2 \\ b\geqq -a-1 \\ b\geqq a-1 \end{cases}$$



不等式の表す領域は，右の図の斜線部分で
境界線を含む．

(2) $a+2b=k$ とおくと　$b=-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{k}{2}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，傾き $-\dfrac{1}{2}$ で，切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線である．

k は点 $(2,\ 1)$ を通るとき最大値 $\mathbf{4}$，点 $(0,-1)$ を通るとき最小値 $\mathbf{-2}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: x^2+y^2-4y+2=0$ の中心を M，半径を r とすると　M$(0,\ 2)$，$r=\sqrt{2}$

2 点 A$(-\sqrt{2},\ 0)$，O$(0,\ 0)$ を通り，中心が $\mathrm{B}_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である円 C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると

$$r_1=\mathrm{OB}_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad r_2=\mathrm{OB}_2=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\mathrm{B}_1\mathrm{M}=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{B}_2\mathrm{M}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\mathrm{B}_1\mathrm{M}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=r_1+r$，$\mathrm{B}_2\mathrm{M}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=r_2-r$

よって，C_1 と C は外接する．C_2 と C は内接する．

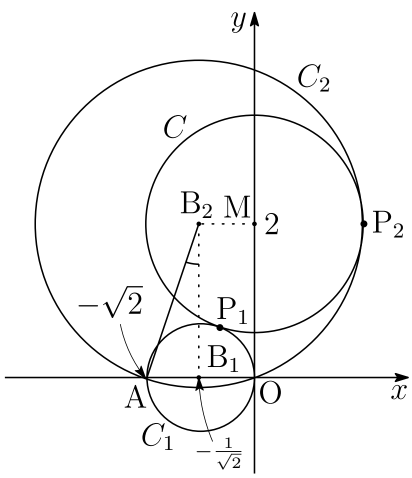
(2) 点 P は円 C_1 の外部 (境界を含む) にあるから

$$\angle\mathrm{APO} \leqq \angle\mathrm{AP}_1\mathrm{O}=\frac{\pi}{2}$$

同時に，点 P は円 C_2 の内部 (境界を含む) にあるから

$$\angle\mathrm{APO} \geqq \angle\mathrm{AP}_2\mathrm{O}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{AP}_2\mathrm{O} \leqq \angle\mathrm{APO} \leqq \angle\mathrm{AP}_1\mathrm{O}$



$$\cos\angle\mathrm{AP}_2\mathrm{O} \geqq \cos\angle\mathrm{APO} \geqq \cos\frac{\pi}{2}$$

$\angle\mathrm{AP}_2\mathrm{O}=\angle\mathrm{AB}_2\mathrm{B}_1$，$\cos\angle\mathrm{AB}_2\mathrm{B}_1=\dfrac{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}{\mathrm{AB}_2}=\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より

$$0 \leqq \cos\angle\mathrm{APO} \leqq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，最小値 $\mathbf{0}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) (i) $A_n(1)$ であるのは，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 \quad \text{よって} \quad A_n(1) = 1$$

$A_n(2)$ であるのは，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq 2,\quad a_n = 2$$

1, 2 の 2 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$A_n(2) = {}_2\mathrm{H}_{n-1} = {}_{2+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 = \boldsymbol{n}$$

(ii) $A_n(3)$ は，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j$，$a_n = 3$ $(j = 1, 2, 3)$ より

$$\boldsymbol{A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)}$$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq 3$ の場合の数は，1，2，3 の 3 個から $n-1$ 個取り出す重複組合せの総数であるから

$$\begin{aligned} A_n(3) &= {}_3\mathrm{H}_{n-1} = {}_{3+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1} \\ &= {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

(2) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となるのは

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = j \text{ かつ } a_n < j \quad (j = 2, 3)$$

よって，求める場合の数は

$$\begin{aligned} A_{n-1}(2)\cdot 1 + A_{n-1}(3)\cdot 2 &= (n-1)\cdot 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\cdot 2 \\ &= \boldsymbol{(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 関数 $y = ax - bx^2$ は点 $(p,\ p^2)$ を通るから　$p^2 = ap - bp^2$

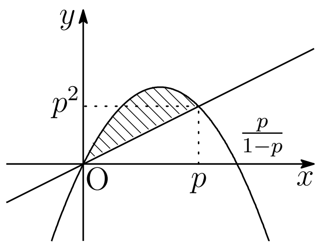
$p \neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{b = \dfrac{a}{p} - 1}$

(2) (i) (1) の結果から

$$y = ax - \left(\frac{a}{p} - 1\right)x^2 = \frac{x(p-x)}{p}a + x^2$$

$0 \leqq x \leqq p$ より $(0 < p < 1)$, $\dfrac{x(p-x)}{p} \geqq 0$ であるから，$p \leqq a \leqq 1$ において，y は単調増加．よって

$$\boldsymbol{px \leqq y \leqq \frac{p-1}{p}x^2 + x}$$



(ii) よって，D の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．

(3) (2) の結果から，D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left\{\left(\frac{p-1}{p}x^2 + x\right) - px\right\} dx \\ &= \frac{p-1}{p}\int_0^p x(x-p)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}p^2(1-p)} \end{aligned}$$

$g(p) = \dfrac{1}{6}p^2(1-p)$ とおくと　$g'(p) = \dfrac{1}{6}p(2-3p)$

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$g(p)$	$\frac{1}{48}$	$\nearrow$	$\frac{2}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{128}$

よって，$p = \dfrac{2}{3}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{81}}$，$p = \dfrac{1}{2}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{48}}$ をとる．■