

令和7年度 千葉大学 2次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・
園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学 (化学・生物・植物生命・人間)
[1] [2] [3] (80 分) 数 I・II・A・B・C
- 教育学部 (中学数学) [3] [4] [5] [6] [7] [8] (150 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・
園芸 (園芸, 応用生命, 緑地環境)・先進科学 (物理・工学・情報・データ)
[4] [5] [6] [7] [8] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 [5] [6] [7] [8] [9] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [4] [5] [6] [7] [8] [9] (180 分) 数 I・II・III・A・B・C

[1] 以下の問いに答えよ.

- (1) 12^{77} の桁数および最高位の数字を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$,
 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.
- (2) a を実数とする. 方程式

$$x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

が虚数解を持つ a の範囲を求めよ.

[2] 以下の問いに答えよ.

- (1) 1 個のさいころを 4 回投げるとき, 出る目の総和が 21 以上になる確率を求めよ.
- (2) 1 個のさいころを 5 回投げるとき, 出る目の総和が 10 以上になる確率を求めよ.

- 3** 座標平面上に 3 点 $A(0, 2)$, $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ があり, 三角形 ABC の内接円上に点 P がある. また, 2 点 D , E を

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{CE}$$

となるようにとる. ここで O は原点 $(0, 0)$ である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 内積の値 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PE}$ が点 P の位置によらず一定であることを示し, その値を求めよ.
- (2) 線分 DE の中点を M とする. 点 P が三角形 ABC の内接円上を 1 周するとき, 点 M の軌跡を求めよ.

- 4** 数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n > 3$ が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ.
- (3) 2 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3 < 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ.

- 5 さいころを投げて座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す. 最初の点 P の位置は原点であるとする. 1 回の試行では 1 個のさいころを投げて, 出た目に応じて以下の規則により点 P を動かす.

- 1 または 2 が出れば, 点 P を x 軸方向に $+1$ だけ動かす.
- 3 または 4 が出れば, 点 P を y 軸方向に $+1$ だけ動かす.
- 5 または 6 が出れば, 点 P を y 軸方向に -1 だけ動かす.

n 回目の操作直後の点 P の座標を (x_n, y_n) とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率を求めよ.
- (2) $y_6 = 0$ となる確率を求めよ.
- (3) $y_1, \dots, y_5$ がすべて 0 以上で, かつ $y_6 = 0$ となる確率を求めよ.

- 6 座標平面上に, 曲線 $D: y = \log x$ ($x > 0$) とその上の点 $A(a, \log a)$ がある. 半径 r の円 C は y 軸に接し, かつ, 円 C は曲線 D と点 A で同一の接線を持つ. さらに, $r < a$ が成り立つとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) r を a を用いて表せ.
- (2) $r > \frac{a}{2}$ となることを示せ.
- (3) $a = \sqrt{3}$ のとき, x 軸, y 軸, 円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積を求めよ.

- 7 すべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ.
- (2) $f''(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ.
- (3) $y = f(x)$ の凹凸, 変曲点, ならびに漸近線を調べて, そのグラフの概形を描け.
- (4) 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ.

8 正方形に対して、その2本の対角線の交点を、その正方形の中心と呼ぶ。また、すべての内角が 180° 未満の四角形を凸四角形と呼ぶ。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上に正方形 PQRS があり、その中心 T から見て4点 P, Q, R, S は反時計回りに並んでいる。頂点 P, Q の座標を表す複素数を p, q とするとき、中心 T の座標を表す複素数 t を p, q を用いて表せ。
- (2) 複素数平面上に凸四角形 ABCD がある。頂点 A, B, C, D の座標を表す複素数はそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。四角形 ABCD の外側に線分 AB を1辺とする正方形を描きその中心を X とする。同様に、ABCD の外側に線分 BC を1辺とする正方形を描きその中心を Y とし、ABCD の外側に線分 CD を1辺とする正方形を描きその中心を Z とし、ABCD の外側に線分 DA を1辺とする正方形を描きその中心を W とする。このとき、 $XZ = YW$ であり、かつ、直線 XZ と直線 YW が直交することを証明せよ。
- (3) (2) において、線分 XZ と線分 YW がそれらの中点で交わるとき、四角形 ABCD はどのような四角形になるか。理由とともに述べよ。

9 関数 $f(x)$ は3次導関数 $f'''(x)$ を持ち、 $f'(0) = 0$ であり、すべての実数 x に対して $f''(x) > 0$, $f'''(x) < 0$ を満たすものとする。また、 $0 < a < b$ とし、

$$F = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a) - \int_a^b f(x) dx$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $F > 0$ を示せ。
- (2) $F < \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b - a)$ を示せ。
- (3) $f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2} f'(b)$ を示せ。
- (4) $F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a)$ を示せ。

解答例

- 1** (1) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{77} &= 77 \log_{10} 12 = 77(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 77(2 \times 0.3010 + 0.4771) = 83 + 0.0907\end{aligned}$$

$0.0907 < \log_{10} 2$ より, $83 < \log_{10} 12^{77} < 83 + \log_{10} 2$ であるから

$$10^{83} < 12^{77} < \log_{10} 2 \cdot 10^{83}$$

よって 12^{77} は **84桁**, 最高位の数字は **1**

- (2) $f(x) = x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 3a$

(i) $a < 0$ のとき, 常に $f'(x) > 0$ より, $f(x) = 0$ の実数解の個数は 1 個で虚数解をもつ.

(ii) $a = 0$ のとき, $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから, 明らかに, $f(x) = 0$ の実数解の個数は 1 個で虚数解をもつ.

(iii) $a > 0$ のとき, $f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値は $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(\sqrt{a}) > 0$ を満たせばよいから $-2a\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

$$8a^3 - 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

(i)~(iii) より, 求める a の値の範囲は $a < \frac{1}{2}$



- 2** (1) 1個のさいころを4回投げるとき、出る目の総和について

総和が24である場合は $\{6, 6, 6, 6\}$

総和が23である場合は $\{5, 6, 6, 6\}$

総和が22である場合は $\{4, 6, 6, 6\}, \{5, 5, 6, 6\}$

総和が21である場合は $\{3, 6, 6, 6\}, \{4, 5, 6, 6\}, \{5, 5, 5, 6\}$

これらの場合の総数は

$$1 + \frac{4!}{1!3!} + \left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{2!2!} \right) + \left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{3!1!} \right) \\ = 1 + 4 + (4 + 6) + (4 + 12 + 4) = 35$$

よって、求める確率は $\frac{35}{6^4} = \frac{35}{1296}$

- (2) 1個のさいころを5回投げるとき、出る目の総和について

総和が5である場合は $\{1, 1, 1, 1, 1\}$

総和が6である場合は $\{1, 1, 1, 1, 2\}$

総和が7である場合は $\{1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 1, 2, 2\}$

総和が8である場合は $\{1, 1, 1, 1, 4\}, \{1, 1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 2, 2\}$

総和が9である場合は $\{1, 1, 1, 1, 5\}, \{1, 1, 1, 2, 4\}, \{1, 1, 1, 3, 3\},$
 $\{1, 1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 2, 2, 2\}$

これらの場合の総数は

$$1 + \frac{5!}{4!1!} + \left(\frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!2!} \right) + \left(\frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!1!1!} + \frac{5!}{2!3!} \right) \\ + \left(\frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!1!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{1!4!} \right) \\ = 1 + 5 + (5 + 10) + (5 + 20 + 10) + (5 + 20 + 10 + 30 + 5) \\ = 126$$

総和が9以下である確率は $\frac{126}{6^5} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 7}{6^5} = \frac{7}{2 \cdot 6^3} = \frac{7}{432}$

求める確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{7}{432} = \frac{425}{432}$$

■

- 3** (1) 3点 $A(0, 2)$, $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ より $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$
 $\triangle ABC$ は正三角形であり, その内接円の中心は重心と一致するから

$$\left(\frac{0 + (-\sqrt{3}) + \sqrt{3}}{3}, \frac{2 + (-1) + (-1)}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad O(0, 0)$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径は, O と直線 BC の距離であるから 1

P は, O を中心とする半径 1 の円周上の点であるから $|\vec{OP}| = 1 \cdots \textcircled{1}$

$$\vec{PB} = \vec{AD} \text{ より } \vec{OB} - \vec{OP} = \vec{OD} - \vec{OA}$$

$$(*) \quad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OP} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PD} = \vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OP}$$

$$\vec{PO} = \vec{CE} \text{ より } -\vec{OP} = \vec{OE} - \vec{OC}$$

$$(**) \quad \vec{OE} = \vec{OC} - \vec{OP} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PE} = \vec{OC} - 2\vec{OP}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{PD} \cdot \vec{PE} &= (\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OP}) \cdot (\vec{OC} - 2\vec{OP}) \\ &= (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OC} - 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{OP} + 4|\vec{OP}|^2 \end{aligned}$$

ここで, $\vec{OA} + \vec{OB} = (-\sqrt{3}, 1)$, $\vec{OC} = (\sqrt{3}, -1)$ より

$$(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = -4, \quad \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{2}$$

上の 2 式および $\textcircled{1}$ から $\vec{PD} \cdot \vec{PE} = -4 + 0 + 4 \cdot 1 = 0$

- (2) $(*)$, $(**)$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より, 線分 DE の中点 M は

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OD} + \vec{OE}}{2} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OP}}{2} = -\vec{OP}$$

したがって $|\vec{OM}| = |\vec{OP}|$

よって, 点 M の軌跡は, 原点 O を中心とする半径 1 の円である. ■

$$\boxed{4} \quad a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} \quad \cdots (*)$$

(1) 漸化式 (*) より

$$a_{n+1} - 3 = \frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)^2}{3a_n^2} \quad (**)$$

$a_1 - 3 = 10 - 3 > 0$, $a_n - 3 > 0$ のとき $a_{n+1} - 3 > 0$ であるから, 数学帰納法により, すべての自然数 n に対して

$$a_n - 3 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n > 3$$

(2) 漸化式 (*) および (1) の結論から

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} = -\frac{1}{3a_n^2}(a_n - 3)(a_n^2 + 3a_n + 9) < 0$$

よって, すべての自然数 n について

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} < a_n$$

(3) (**) より

$$a_{n+1} - 3 = \frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)}{3a_n^2}(a_n - 3)$$

(1) の結論から

$$\frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)}{3a_n^2} = \frac{2a_n^2 - 3a_n - 9}{3a_n^2} = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{a_n} + \frac{3}{a_n^2} \right) < \frac{2}{3}$$

$$\frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)}{3a_n^2} > 0 \text{ に注意して} \quad 0 < \frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)}{3a_n^2} < \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1} - 3 < \frac{2}{3}(a_n - 3)$$

$$a_n - 3 < (a_1 - 3) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 7 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$



- 5** (1) 1回の試行により，1または2，3または4，5または6の目が出る事象を，それぞれ， A ， B ， C とすると，その確率は

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$x_6 = y_6 = 0$ となるのは，6回の試行のうち，事象 B ， C がそれぞれ3回ずつ起こる場合である．よって，求める確率は

$$\frac{6!}{3!3!} P(B)^3 P(C)^3 = 20 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{729}$$

- (2) $y_6 = 0$ となるのは，事象 A ， B ， C の起こった回数をそれぞれ a ， b ， c 回とすると， $a + b + c = 6$ ， $b = c$ より ($a, b, c \geq 0$)

$$a = 6 - 2k, \quad b = c = k \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^3 \frac{6!}{(6-2k)!k!k!} P(A)^{6-2k} P(B)^k P(C)^k \\ &= \sum_{k=0}^3 \frac{6!}{(6-2k)!k!k!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \left(1 + \frac{6!}{4!1!1!} + \frac{6!}{2!2!2!} + \frac{6!}{3!3!}\right) \cdot \frac{1}{3^6} \\ &= (1 + 30 + 90 + 20) \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{141}{3^6} = \frac{47}{243} \end{aligned}$$

(3) $p = P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ とおく.

$y_6 = 0$ のとき, 事象 A, B, C のそれぞれの回数 a, b, c は, 次の4通り.

$$(a, b, c) = (0, 3, 3), (2, 2, 2), (4, 1, 1), (6, 0, 0)$$

(i) $(a, b, c) = (0, 3, 3)$ のとき, 事象 B, C が起きる順番は, 次の5通り

$$BBBCCC, BBCBCC, BBCCBC, BCBBC, BCBCBC$$

このときの確率は $5p^6$

(ii) $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ のとき, 事象 B, C が起きる順番は, 次の2通り

$$BBCC, BCBC$$

このときの確率は $2 \cdot \frac{6!}{2!4!} p^6 = 30p^6$

(iii) $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ のとき, 事象 B, C が起きる順番は, 次の1通り

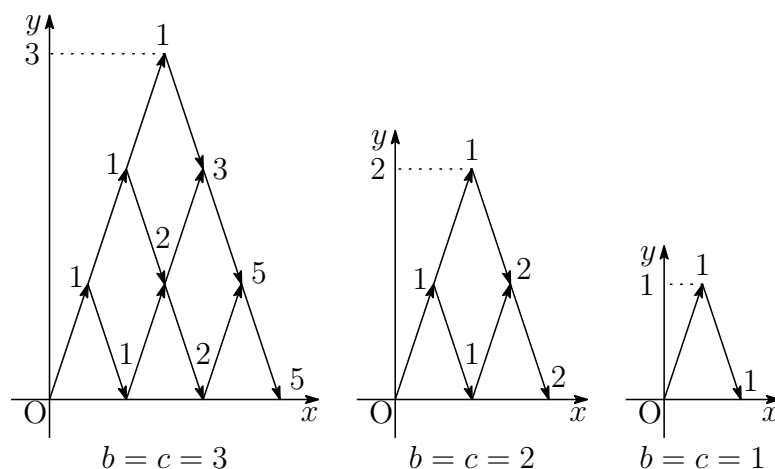
$$BC$$

このときの確率は $\frac{6!}{4!2!} p^6 = 15p^6$

(iv) $(a, b, c) = (6, 0, 0)$ の確率は p^6

(i)~(iv) より, 求める確率は

$$5p^6 + 30p^6 + 15p^6 + p^6 = 51p^6 = \frac{3 \cdot 17}{3^6} = \frac{17}{243}$$

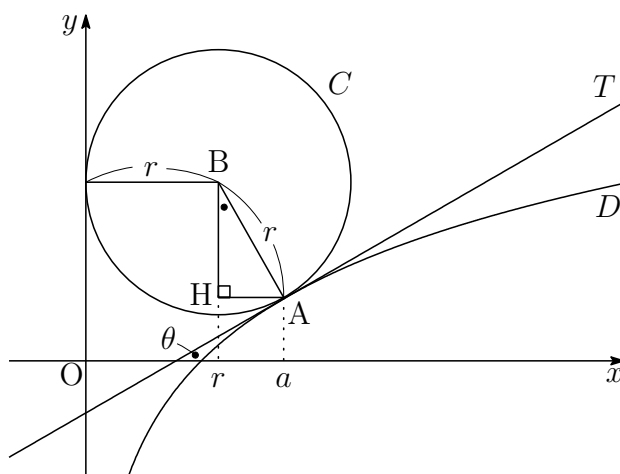


- 6 (1) $y = \log x$ より, $y' = \frac{1}{x}$ であるから, D 上の点 $A(a, \log a)$ における接線 T の傾きは $\frac{1}{a}$. T の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\tan \theta = \frac{1}{a} \quad (*)$$

円 C の中心を B とすると, B の x 座標は r . 下の図のように直角三角形 ABH を考えると, $AH = a - r$ より

$$\sin \theta = \frac{a - r}{r}$$



(*) を $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ に代入すると

$$1 + a^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{a - r}{r} \quad \text{であるから} \quad r = (a - r)\sqrt{1 + a^2}$$

$$(1 + \sqrt{1 + a^2})r = a\sqrt{1 + a^2} \quad \text{よって} \quad r = \frac{a\sqrt{1 + a^2}}{1 + \sqrt{1 + a^2}}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から} \quad r > \frac{a\sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{2}$$

(3) A から x 軸に垂線 AA' , B から y 軸に垂線 BB' を引く.

五角形 $OA'ABB'$ の面積を S_1 とし, 半径 r , 中心角 $\theta + \frac{\pi}{2}$ の扇形の面積を S_2 とすると, 求める面積 S は

$$S = S_1 - S_2 - \int_1^a \log x \, dx$$

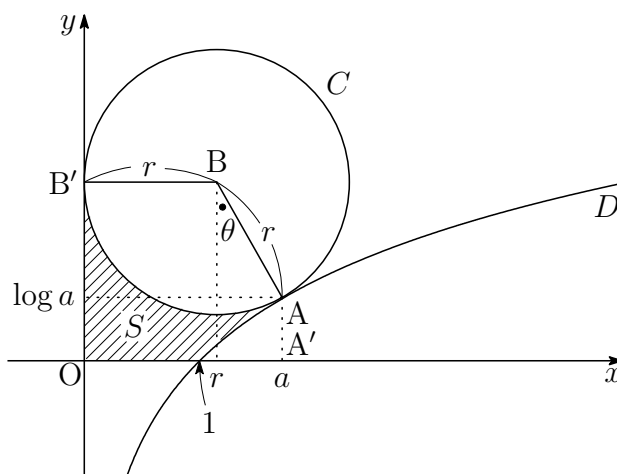
$$a = \sqrt{3} \text{ であるから, } (*) \text{ および } (1) \text{ の結果から } \theta = \frac{\pi}{6}, \quad r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= a \log a + \frac{1}{2}(r+a)r \cos \theta \\ &= \sqrt{3} \log \sqrt{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \log \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6}, \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{9} \pi,$$

$$\begin{aligned} \int_1^a \log x \, dx &= \left[x(\log x - 1) \right]_1^a = a \log a - a + 1 \\ &= \sqrt{3} \log \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \left(\sqrt{3} \log \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \right) - \frac{4\pi}{9} - (\sqrt{3} \log \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1) \\ &= \frac{11}{6} \sqrt{3} - \frac{4\pi}{9} - 1 \end{aligned}$$



■

7 (1) $s = g(x) = x^2 - 1$ とおくと

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}} = \frac{15 - s}{\sqrt{s^2 + 15}}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sqrt{s^2 + 15} - (15 - s) \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2 + 15}}}{s^2 + 15} g'(x) \\ &= \frac{-(s^2 + 15) - (15 - s)s}{(s^2 + 15)^{\frac{3}{2}}} g'(x) = \frac{-15(s + 1)}{(s^2 + 15)^{\frac{3}{2}}} g'(x) \\ &= \frac{-15x^2}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{3}{2}}} \cdot 2x = -\frac{30x^3}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ を解くと $\mathbf{x = 0}$

(2) $-\frac{1}{30}f'(x) = x^3\{g(x)^2 + 15\}^{-\frac{3}{2}}$ の両辺を微分すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{30}f''(x) &= 3x^2\{g(x)^2 + 15\}^{-\frac{3}{2}} + x^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \{g(x)^2 + 15\}^{-\frac{5}{2}} \cdot 2g(x)g'(x) \\ &= \frac{3x^2\{g(x)^2 + 15\} - 3x^3g(x)g'(x)}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{3x^2\{(x^2 - 1)^2 + 15\} - 3x^3(x^2 - 1) \cdot 2x}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{3x^2\{(x^2 - 1)^2 + 15 - 2x^2(x^2 - 1)\}}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^2(16 - x^4)}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

したがって

$$f''(x) = \frac{90x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{\{g(x)^2 + 15\}^{\frac{5}{2}}}$$

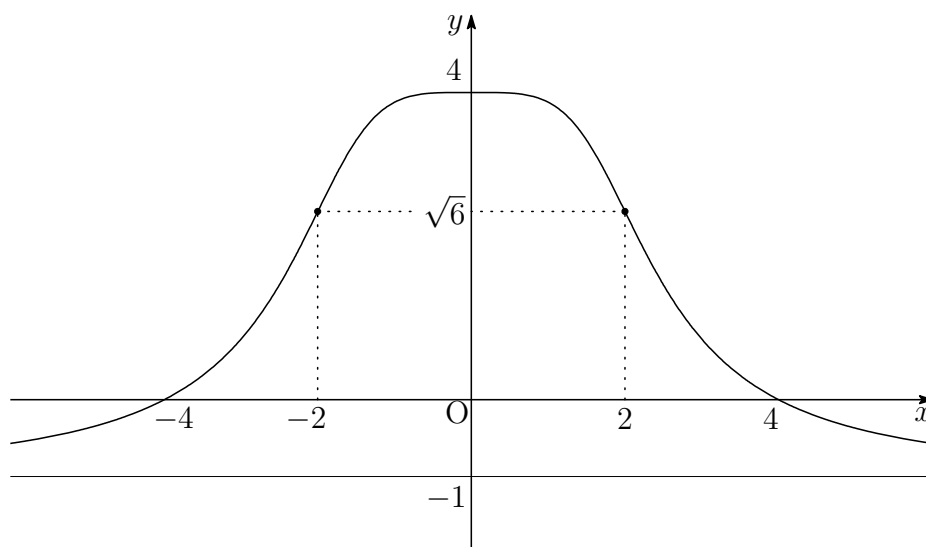
$f''(x) = 0$ を解くと $\mathbf{x = 0, \pm 2}$

(3) (1), (2) の結果から

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗	変曲点 $\sqrt{6}$	↘	極大 4	↘	変曲点 $\sqrt{6}$	↗

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{16}{x^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = -1, \text{ 極大値 } f(0) = 4$$

変曲点 $(\pm 2, \sqrt{6})$, 漸近線 $y = -1$



注意 $f'(\alpha) = 0$ であっても, $x = \alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないとき, $f(\alpha)$ は極値ではない. 同様に, $f''(\beta) = 0$ であって, $x = \beta$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないとき, 点 $(\beta, f(\beta))$ は変曲点ではない. 本題の $y = f(x)$ は y 軸対称であることから, 増減表を $x \geq 0$ の範囲で示してグラフの概形をかき, これを元に $x \leq 0$ の部分の概形をかくことができるが, $(0, 4)$ が変曲点でないこと, すなわち, $f''(0) = 0$ であってもその前後で $f''(x)$ の符号が変わらないことに注意して増減表を示している.

(4) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(u, f(u))$ における接線は

$$y = f'(u)(x - u) + f(u)$$

これが点 $(0, t)$ を通るとき

$$t = -uf'(u) + f(u)$$

ここで, $t = h(u)$ とおくと, $h(u) = -uf'(u) + f(u)$ より

$$\begin{aligned} h'(u) &= -uf''(u) = -u \cdot \frac{90u^2(u^2+2)(u+2)(u-2)}{\{g(u)^2+15\}^{\frac{5}{2}}} \\ &= -\frac{90u^3(u^2+2)(u+2)(u-2)}{\{g(u)^2+15\}^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$h(u)$ の増減表は

u	...	-2	...	0	...	2	...
$h'(u)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(u)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

(1) の結果から

$$\begin{aligned} h(u) &= -uf'(u) + f(u) \\ &= -u \cdot \left(-\frac{30u^3}{\{g(u)^2+15\}^{\frac{3}{2}}} \right) + f(u) \\ &= \frac{30u^4}{\{(u^2-1)^2+15\}^{\frac{3}{2}}} + f(u) \end{aligned}$$

$$f(2) = f(-2) = \sqrt{6}, \quad f(0) = 4, \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = -1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} h(\pm 2) &= \frac{10}{\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}, \quad h(0) = 4, \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} h(u) &= 0 + (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad -1 < t \leq \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

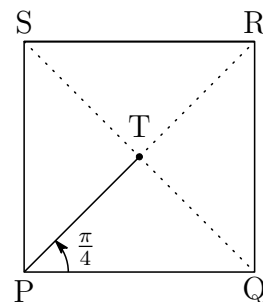
補足 曲線 $y = f(x)$ 上の変曲点 $(\pm 2, \sqrt{6})$ における接線の y 切片が $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(u, f(u))$ における接線の y 切片を d とすると,
 $u \rightarrow \pm\infty$ のとき, $d \rightarrow -1$



- 8 (1) $\frac{PT}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle qpt = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$\frac{t-p}{q-p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\text{よって} \quad t = \frac{(1-i)p + (1+i)q}{2}$$



- (2) 4点 X, Y, Z, W を表す複素数をそれぞれ x, y, z, w とすると,
(1) の結論から

$$x = \frac{(1-i)\beta + (1+i)\alpha}{2}, \quad y = \frac{(1-i)\gamma + (1+i)\beta}{2},$$

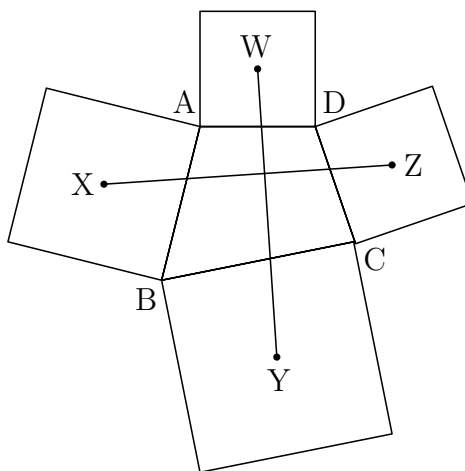
$$z = \frac{(1-i)\delta + (1+i)\gamma}{2}, \quad w = \frac{(1-i)\alpha + (1+i)\delta}{2}$$

$$\text{したがって} \quad z - x = \frac{(1-i)(\delta - \beta) + (1+i)(\gamma - \alpha)}{2}$$

$$w - y = \frac{(1-i)(\alpha - \gamma) + (1+i)(\delta - \beta)}{2}$$

$$\text{上の2式から} \quad i(z - x) = \frac{(1+i)(\delta - \beta) + (-1+i)(\gamma - \alpha)}{2} = w - y$$

$$\text{よって} \quad XZ = YW, \quad XZ \perp YW$$



- (3) $\frac{x+z}{2} = \frac{y+w}{2}$ のとき, $2(x+z) = 2(y+w)$ であるから

$$(1-i)(\beta + \delta) + (1+i)(\alpha + \gamma) = (1-i)(\alpha + \gamma) + (1+i)(\beta + \delta)$$

$$2i(\alpha + \gamma) = 2i(\beta + \delta)$$

$\gamma - \delta = \beta - \alpha$ となり, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ より 四角形 ABCD は平行四辺形 ■

9 (1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (x)' f(x) dx = \left[x f(x) \right]_a^b - \int_a^b x f'(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) - \int_a^b x f'(x) dx\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}F &= \frac{f(b) + f(a)}{2} (b - a) - \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{f(b) + f(a)}{2} (b - a) - b f(b) + a f(a) + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= -\frac{a+b}{2} \{f(b) - f(a)\} + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= -\frac{a+b}{2} \int_a^b f'(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x) dx\end{aligned}\tag{*}$$

$$(**) \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right]_a^b = 0 \text{ であるから}$$

$$F = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \left\{ f'(x) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right\} dx$$

$f''(x) > 0$ より, $f'(x)$ は単調増加であるから

$$a \leq x < \frac{a+b}{2} \text{ において } x - \frac{a+b}{2} < 0, f'(x) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) < 0$$

$$\frac{a+b}{2} < x \leq b \text{ において } x - \frac{a+b}{2} > 0, f'(x) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) > 0$$

よって $F > 0$

(2) (*), (**) より

$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x) dx \\
 &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \left\{ f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\}' dx \\
 &= \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right) \left\{ f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \right]_a^b \\
 &\quad - \int_a^b \left\{ f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a) \\
 &\quad - \int_a^b \left\{ f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} dx
 \end{aligned}$$

ここで, $g(x) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ とおくと

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$f''(x) > 0$ より, $f'(x)$ は単調増加であるから

x	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

上の増減表から, $g(x) \geq 0$ (等号は $x = \frac{a+b}{2}$ のとき) より

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a) - \int_a^b g(x) dx \\
 &< \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a)
 \end{aligned}$$

(3) $G = f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$ とおくと, (2) の結論から

$$F < \frac{1}{2}G(b-a) \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} G &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x) dx \\ &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)' f'(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)' f'(x) dx \\ &= -\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) dx \\ &\quad + \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) \right]_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \{f'(b) - f'(a)\} \\ &\quad - \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f''(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) dx \end{aligned}$$

$f''(x) > 0$ より

$$a \leq x < \frac{a+b}{2} \text{ において } \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f''(x) > 0$$

$$\frac{a+b}{2} < x \leq b \text{ において } \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f''(x) > 0$$

$$\text{したがって } G < \frac{b-a}{2} \{f'(b) - f'(a)\} \quad (\text{Q})$$

$$f'(a) > 0 \text{ であるから } G < \frac{b-a}{2} f'(b)$$

(4) $f'''(x) < 0$ であるから

$$\begin{aligned} f'(b) - f'(a) &= \int_a^b f''(x) dx = \int_a^b (x-b)' f''(x) dx \\ &= \left[(x-b) f''(x) \right]_a^b - \int_a^b (x-b) f'''(x) dx \\ &= (b-a) f''(a) + \int_a^b (b-x) f'''(x) dx < (b-a) f''(a) \quad (\text{R}) \end{aligned}$$

$$(\text{P}), (\text{Q}), (\text{R}) \text{ より } F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a) \quad \blacksquare$$