令和６年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・
  園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学 (化学・生物・植物生命・人間)
  1 2 3 (80 分) 数 I・II・A・B
- 教育学部 (中学数学) 3 4 5 6 7 8 (150 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・
  園芸 (園芸，応用生命，緑地環境)・先進科学 (物理・工学)
  4 5 6 7 8 (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 5 6 7 8 9 (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) 4 5 6 7 8 9 (180 分) 数 I・II・III・A・B

1 以下の問いに答えよ．

(1) 3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するような，a の値の範囲を求めよ．

(2) 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在するような，x の値の範囲を求めよ．

(3) ある二等辺三角形の 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ であるとき，x の値を求めよ．

2 白球が 3 個，黒球が 5 個，赤球が 2 個入った袋がある．以下のゲームを n 回続けて行う．

> 袋から球を 1 個取り出す．白球だった場合は 1 点を獲得する．黒球だった場合はさいころを投げて，出た目が 3 の倍数だった場合には 1 点，そうでない場合には 0 点を獲得する．赤球だった場合はコインを投げて，表が出た場合は 2 点，裏が出た場合は 0 点を獲得する．取り出した球は袋に戻さない．

(1) $n=2$ のとき，総得点がちょうど 3 点となる確率を求めよ．

(2) $n=3$ のとき，総得点がちょうど 5 点となる確率を求めよ．

(3) $n=3$ のとき，総得点が 4 点以上となる確率を求めよ．

3 a を実数とする．$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつような，a の値の範囲を求めよ．

(2) k を正の実数とし，$g(x) = kx$ とする．a が (1) の範囲あるとき，$y = |f(x)|$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ．

4 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 \sin x \, dx$ を求めよ．

(2) 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(-1)$，$\mathrm{R}(\sqrt{3} - 1 - i)$ が正三角形をなすとき，複素数 z を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(3) 正の整数 n，p，q が，$p > q$ かつ ${}_p\mathrm{C}_2 + {}_q\mathrm{C}_1 = n$ を満たすとする．${}_m\mathrm{C}_2 \leqq n$ となる最大の整数 m を求めよ．

5 n を 3 以上の整数とする．座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y) \mid x = 1, 2, 3, \ldots, n,\ y = 1,\ 2\}$$

を考える．この集合から異なる 3 点を無作為に選び，その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする．ただし，3 点が同一直線上にあるときは $X = 0$ とする．

(1) k が 0 以上の整数のとき，X が $\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ．

(2) X が $\dfrac{n}{4}$ 以下のとなる確率を q_n とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

6 関数 $f(x) = e^x + e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $f(x) = 2$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた値のうち最小のものを a_1，最大値のものを a_2 とする．$y = f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x = a_1$，直線 $x = a_2$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{7}$ n を正の整数とする．x の関数

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$$

について以下の問いに答えよ．

(1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする．$f\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \beta_n$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 半径 1，中心 O の円 C がある．2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する．
- C_1 と C_2 は互いに C に外接する．

円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D，E とし，半径をそれぞれ p，q とする．$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) q を p と θ を用いて表せ．

(2) p を固定する．θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ．

さらに，円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_3 と C_1 は半径が等しい．
- C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する．

このとき以下の問いに答えよ．

(3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき，q の値を求めよ．

(4) θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{p}$ の極限値を求めよ．

9 m を 0 以上の整数，n を 1 以上の整数，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，$F(m,\ n)$ を

$$F(m,\ n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k\mathrm{C}_m t^k$$

で定める．

(1) p を整数とする．

$$A = \frac{(t-1)F(m+1,\ n) + tF(m,\ n)}{t^p}$$

が t によらない値となるような p と，そのときの A を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(m,\ n)$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$0 < s < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^m s^k = 0$ であることは用いてよい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するための条件は

$$|2-5| < a < 2+5 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{3 < a < 7}$$

(2) $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$ は辺の長さであるから

$$5x > 1,\quad x+10 > 1 \quad \text{ゆえに} \quad x > \frac{1}{5}$$

このとき，$\log_{10}(x+10) > \log_{10}3$ に注意すると，3 辺の長さが

$$\log_{10}(5x),\ \log_{10}(x+10),\ \log_{10}3$$

の三角形が存在するための条件は

$$\log_{10}(x+10) - \log_{10}3 < \log_{10}(5x) < \log_{10}(x+10) + \log_{10}3$$

したがって $\dfrac{x+10}{3} < 5x < 3(x+10)$ よって $\boldsymbol{\dfrac{5}{7} < x < 15}$

(3) (2) で求めた x の範囲から，$5x > 3$, $x+10 > 3$ であるから，二等辺三角形であるとき

$$5x = x+10 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) このとき，赤球は丁度 1 回取り出される．

(i) 白球 (1 点)，赤球 (2 点) をそれぞれ 1 回ずつ取り出す確率は

$$\frac{3\cdot2}{10\cdot9}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

(ii) 黒球 (1 点)，赤球 (2 点) をそれぞれ 1 回ずつ取り出す確率は

$$\frac{5\cdot2}{10\cdot9}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{27}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{27} = \boldsymbol{\frac{14}{135}}$$

(2) $n=3$ で総得点が 5 点のとき，赤球 (2 点) は丁度 2 回取り出される．

(i) 白球 (1 点) を 1 回，赤球 (2 点) を 2 回取り出す確率は

$$\frac{3\times 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{160}$$

(ii) 黒球 (1 点) を 1 回，赤球 (2 点) を 2 回取り出す確率は

$$\frac{5\times 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{288}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{1}{160}+\frac{1}{288}=\boldsymbol{\frac{7}{720}}$$

(3) $n=3$ で総得点が 4 点となるのは，(i)〜(iv) の場合である．

(i) 黒球 (0 点) を 1 回，赤球 (2 点) を 2 回取り出す確率は

$$\frac{5\times 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{144}$$

(ii) 白球 (1 点) を 2 回，赤球 (2 点) を 1 回取り出す確率は

$$\frac{3\cdot 2\times 2}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{40}$$

(iii) 黒球 (1 点) を 2 回，赤球 (2 点) を 1 回取り出す確率は

$$\frac{5\cdot 4\times 2}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{108}$$

(iv) 白球 (1 点) を 1 回，黒球 (1 点) を 1 回，赤球 (2 点) を 1 回取り出す確率は

$$\frac{3\times 5\times 2}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\frac{3!}{1!1!1!}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

赤玉は 2 個であるから，$n=3$ のとき総得点が 6 点以上になることはない．したがって，求める確率は，(2) および (i)〜(iv) の結果から，求める確率は

$$\frac{7}{720}+\frac{1}{144}+\frac{1}{40}+\frac{1}{108}+\frac{1}{24}=\boldsymbol{\frac{5}{54}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2-ax+a^2-2$ より　$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-2$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつとき

$$\frac{a}{2}>0,\quad \frac{3}{4}a^2-2<0,\quad f(0)=a^2-2>0$$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{\sqrt{2}<a<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

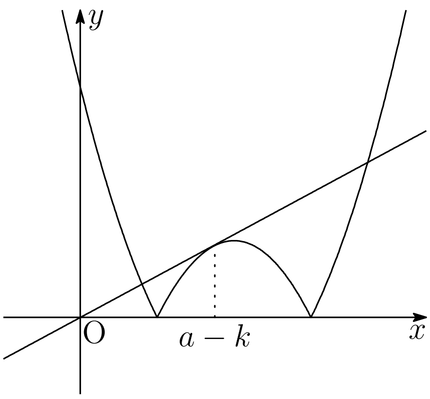
(2) $-f(x)=kx$，すなわち，$f(x)+kx=0$ が重解をもつ k の値を求めればよい．

$$x^2+(k-a)x+a^2-2=0\quad \text{これから，重解は}\quad a-k$$

$y=|f(x)|$ と直線 $y=kx$ の接点の x 座標について $a-k>0$ に注意すると，上の方程式の係数について

$$(k-a)^2-4{\cdot}1(a^2-2)=0\quad \text{ゆえに}\quad a-k=2\sqrt{a^2-2}$$

よって　$\boldsymbol{k=a-2\sqrt{a^2-2}}$



■

$\boxed{4}$ (1) (部分積分法を利用)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2\sin x\,dx &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2(-\cos x)'\,dx\\ &= \Big[\,x^2(-\cos x)-2x(-\sin x)+2\cos x\,\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}\\ &= \Big[\,(2-x^2)\cos x+2x\sin x\,\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}\pi^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-3}\end{aligned}$$

補足 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)-f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x)+f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\quad \cdots+(-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x)+(-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x)-f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x)\\ &\quad \cdots+(-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x)+(-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) 3 点 P，Q，R が正三角形をなすのは，Q を中心に R を $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が $\mathrm{P}(z)$ であるから

$$\begin{aligned}z-(-1) &= \{(\sqrt{3}-1-i)-(-1)\}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\\ z &= -1+(\sqrt{3}-i)\cdot\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i)\\ &= \boldsymbol{-1+\sqrt{3}+i,\ -1-2i}\end{aligned}$$

(3) 正の整数 n, p, q が，$p>q$ かつ ${}_p\mathrm{C}_2+{}_q\mathrm{C}_1=n$，${}_m\mathrm{C}_2 \leqq n$ より

$${}_m\mathrm{C}_2 \leqq {}_p\mathrm{C}_2+{}_q\mathrm{C}_1 < {}_p\mathrm{C}_2+{}_p\mathrm{C}_1={}_{p+1}\mathrm{C}_2$$

よって，求める最大の整数 m は　$\boldsymbol{m=p}$ ■

5 (1) $A_1=\{(x,\ y)\mid x=1,2,3,\ldots,n,\ y=1\}$，
$A_2=\{(x,\ y)\mid x=1,2,3,\ldots,n,\ y=2\}$ とする．

(i) $k=0$ のとき，3 点がすべて A_1 または A_2 にあるから

$$p_k=\frac{2\cdot{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{2\cdot n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{2(2n-1)}$$

(ii) $1\leqq k\leqq n-1$ のとき，3 点 $(j,\ 1)$，$(j+k,\ 1)$，$(l,\ 2)$ または 3 点 $(j,\ 2)$，$(j+k,\ 2)$，$(l,\ 1)$ を結んで得られる図形 (三角形) であるから $(j=1,2,\ldots,n-k,\ l=1,2,\ldots,n)$

$$p_k=\frac{(n-k)\cdot n\cdot 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}$$

(iii) $0\leqq X\leqq\dfrac{n-1}{2}$ であるから，$n\leqq k$ のとき，$p_k=0$

(i)〜(iii) より
$$\boldsymbol{p_k=\begin{cases}\dfrac{n-2}{2(2n-1)} & (k=0)\\ \dfrac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)} & (1\leqq k\leqq n-1)\\ 0 & (n\leqq k)\end{cases}}$$

(2) $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ とすると (m は $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数)

$$\begin{aligned}q_n&=p_0+\sum_{k=1}^{m}p_k=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\left\{nm-\frac{1}{2}m(m+1)\right\}\\&=\frac{1-\frac{2}{n}}{2(2-\frac{1}{n})}+\frac{3}{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}\left\{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\right)\right\}\end{aligned}$$

$\dfrac{n-1}{2}\leqq\left[\dfrac{n}{2}\right]\leqq\dfrac{n}{2}$ より，$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\leqq\dfrac{m}{n}\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$$

したがって
$$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{13}{16}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) 相加平均・相乗平均の大小関係から

$$f(x)=\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}+e^{-2x}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^x}{2}\cdot e^{-2x}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

上式で等号が成立するとき

$$\frac{e^x}{2}=e^{-2x}\quad \text{すなわち}\quad e^x=\sqrt[3]{2}\ \left(x=\frac{1}{3}\log 2\right)$$

よって，最小値 $f\left(\frac{1}{3}\log 2\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}}$

(2) $f(x)=2$ より　$e^x+e^{-2x}=2$　ゆえに　$e^{3x}-2e^{2x}+1=0$

$t=e^x$ とおくと $(t>0)$

$$t^3-2t^2+1=0\quad \text{ゆえに}\quad (t-1)(t^2-t-1)=0$$

$t>0$ に注意して　$t=1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=0,\ \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $t=e^x$ より　$\frac{dt}{dx}=e^x=t$

x	$a_1\longrightarrow a_2$
t	$1\longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

求める立体の体積を V とし，$k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと $(k^2-k-1=0)$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{a_1}^{a_2}(e^x+e^{-2x})\,dx=\int_1^k(t+t^{-2})^2t^{-1}dt\\&=\int_1^k(t+2t^{-2}+t^{-5})\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2-2t^{-1}-\frac{1}{4}t^{-4}\right]_1^k\\&=\frac{1}{2}k^2-\frac{2}{k}-\frac{1}{4k^4}+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

ここで，$k^2=k+1$，$\frac{1}{k}=k-1$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}&=k^2-2k+1=(k+1)-2k+1=-k+2\\\frac{1}{k^4}&=(-k+2)^2=k^2-4k+4=(k+1)-4k+4=-3k+5\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\frac{1}{2}(k+1)-2(k-1)-\frac{1}{4}(-3k+5)+\frac{7}{4}\\&=-\frac{3}{4}k+3=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+3=\frac{21-3\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\frac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi}$　■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$ より

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 - 2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + (2n-3)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + 1 \\
&= \frac{1 - 2n(1-\alpha) + (2n-3)(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^3}{(1-\alpha)^3} \\
&= \frac{-\alpha^3 + 2n\alpha^2 - (2n-3)\alpha - 1}{(1-\alpha)^2} = -\frac{f(\alpha)}{(1-\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

α は $f(x) = 0$ の解であるから，$f(\alpha) = 0$ より $f\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right) = \mathbf{0}$

(2) n は正の整数であるから

$$f(-1) = 3 - 4n < 0, \quad f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0$$

よって，$f(x) = 0$ の解は，3 つの区間 $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x$ にそれぞれ 1 個ずつ実数解が存在する．

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に α_n，β_n，γ_n とすると，(2) の結果から

$$-1 < \alpha_n < 0 < \beta_n < 1 < \gamma_n$$

さらに，(1) の結論から

$$\alpha_n = \frac{1}{1-\gamma_n}, \quad \beta_n = \frac{1}{1-\alpha_n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{1-\beta_n}$$

上の第 3 式から $\beta_n = 1 - \dfrac{1}{\gamma_n} \quad \cdots (*)$

$n \geqq 2$ のとき
$$
\begin{aligned}
f(n) &= -n^3 + 2n^2 - 3n + 1 \\
&= -n^2(n-2) - 3n + 1 < 0
\end{aligned}
$$

したがって $n < \gamma_n \quad \cdots (**)$

$(*)$，$(**)$ より $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\beta_n = 1}$

補足 $(**)$ および $\alpha_n = \dfrac{1}{1-\gamma_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ■

$\boxed{8}$ (1) $C,\ C_1,\ C_2$ の半径はそれぞれ $1,\ p,\ q$ より

$$\mathrm{OD} = 1 - p, \quad \mathrm{OE} = 1 - q, \quad \mathrm{DE} = p + q$$

$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ であるから，$\triangle\mathrm{DOE}$ に余弦定理を適用すると

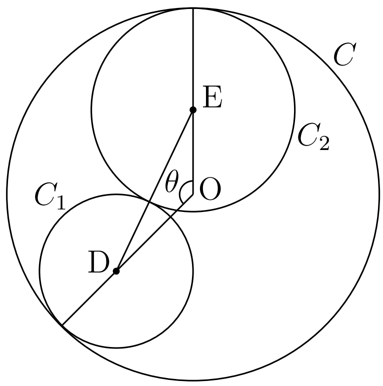
$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cos\theta$$

したがって　$(p+q)^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 - 2(1-p)(1-q)\cos\theta$

q について整理すると

$$\{1 + p - (1-p)\cos\theta\}q = (1-p)(1-\cos\theta)$$

よって　$\boldsymbol{q = \dfrac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}}$



(2) (1) の結果から

$$q = \frac{(1-p)\sin^2\theta}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)}$$

したがって

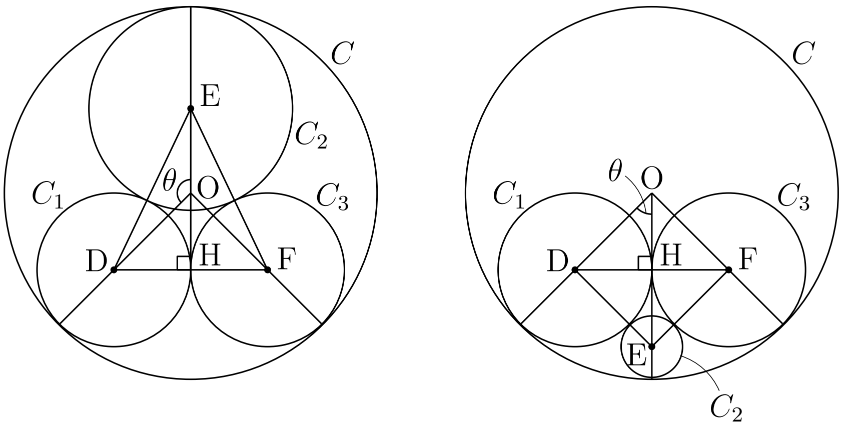
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{\theta^2} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\cdot 1\}(1+1)}\cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{1-p}{4p}}\end{aligned}$$

(3) C_1 と C_3 の半径が等しいから，$p=\sqrt{2}-1$ より

$$\mathrm{OD}=\mathrm{OF}=1-p=2-\sqrt{2}=\sqrt{2}p,\quad \mathrm{DF}=2p$$

$\mathrm{OD}:\mathrm{OF}:\mathrm{DF}=1:1:\sqrt{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{ODF}$ は $\angle\mathrm{DOF}$ が直角である直角二等辺三角形である．また，$\mathrm{DE}=\mathrm{FE}$ であるから，下の図より

$$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{\pi}{4}$$



$p=\sqrt{2}-1$ を (1) の結果に代入すると

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})(1-\cos\theta)}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\cos\theta}$$

- $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$$

- $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

よって　　$\boldsymbol{q=3-2\sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}}$

(4) C_1 と C_3 の接点を H とすると，$\mathrm{OD} = 1 - p$，$\mathrm{DH} = p$ であるから

$$\sin\theta = \frac{p}{1-p} \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} \tag{$*$}$$

$(*)$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\left(1 - \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)(1-\cos\theta)}{1 + \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta} - \left(1 - \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta} \\
&= \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta+2\sin\theta} \\
&= \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)+2\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta+2(1+\cos\theta)}
\end{aligned}$$

上式および $(*)$ から

$$\frac{q}{p} = \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta+2(1+\cos\theta)} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{p} = \frac{1}{4}}$$

■

$\boxed{9}$ (1) $F(m,\ n)=\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k$ より $(m \geqq 0,\ n \geqq 1,\ 0<t<1)$

$n=1$ のとき，$F(m,\ 1)=\displaystyle\sum_{k=m}^{m}{}_k\mathrm{C}_m t^k=t^m$ より

$$(t-1)F(m+1,\ 1)+tF(m,\ 1)=(t-1)t^{m+1}+t\cdot t^m=t^{m+2}$$

$n>1$ のとき，

$$\begin{aligned}
&(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)\\
&\quad=(t-1)\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^k+t\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k\\
&\quad=(t-1)\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}+t\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k\\
&\quad=\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+2}-\sum_{k=m}^{m+n-1}({}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m)t^{k+1}\\
&\quad=\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+2}-\sum_{k=m+1}^{m+n-1}({}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m)t^{k+1}\\
&\quad=t^{m+2}+\sum_{k=m+1}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+2}-\sum_{k=m+1}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}\\
&\quad={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p=m+n+1,\ A={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}}$

(2) (1) で求めた A を $\begin{pmatrix} m+n \\ m+1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m+n \\ m+1 \end{pmatrix}&=\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{(m+n)!}{(n-1)!}\\
&=\frac{1}{(m+1)!}\prod_{k=0}^{m}(k+n) \qquad (*)
\end{aligned}$$

したがって，$\begin{pmatrix} m+n \\ m+1 \end{pmatrix}$ は，n の $m+1$ 次多項式である．

(1) の結果から　$(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)=\left(\begin{array}{c} m+n \\ m+1 \end{array}\right)t^{m+n+1}$

$$F(m,\ n)-\frac{1-t}{t}F(m+1,\ n)=\left(\begin{array}{c} m+n \\ m+1 \end{array}\right)t^{m+n}$$

上式の両辺に $\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^m$ を掛けると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m,\ n)-&\left(\frac{1-t}{t}\right)^{m+1}F(m+1,\ n)\\ &=t^n\left(\begin{array}{c} m+n \\ m+1 \end{array}\right)(1-t)^m\end{aligned}$$

$m \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\left\{\left(\frac{1-t}{t}\right)^j F(j,\ n)-\left(\frac{1-t}{t}\right)^{j+1}F(j+1,\ n)\right\}&\\ =t^n\sum_{j=0}^{m-1}\left(\begin{array}{c} j+n \\ j+1 \end{array}\right)(1-t)^j&\end{aligned}$$

したがって

$$F(0,\ n)-\left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m,\ n)=t^n\sum_{j=0}^{m-1}\left(\begin{array}{c} j+n \\ j+1 \end{array}\right)(1-t)^j \qquad \text{(P)}$$

ここで，定義式より

$$F(0,\ n)=\sum_{k=0}^{n-1}{}_k\mathrm{C}_0 t^k=\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\frac{1-t^n}{1-t} \qquad \text{(Q)}$$

$(*)$ を利用して，(P)，(Q) の 2 式について，$n\to\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left\{F(0,\ n)-\left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m,\ n)\right\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}F(0,\ n)=\frac{1}{1-t}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\frac{1}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^m$

上式は $m=0$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\frac{1}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^m} \qquad \blacksquare$$