令和５年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・
  園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学 (化学・生物・植物生命・人間)
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ (80 分) 数 I・II・A・B
- 教育学部 (中学数学) $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ (150 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・
  園芸 (園芸，応用生命，緑地環境)・先進科学 (物理・工学)
  $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

1 座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ をとる．線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，$\triangle$APQ と $\triangle$OBQ の面積が等しくなるようにとる．

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ．

(2) $\triangle$OBQ の面積を p を用いて表せ．

(3) p が $0 < p < 2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

2 1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える．出た目が 1，2 であれば得点は 2，出た目が 3 であれば得点は 1，出た目が 4，5，6 であれば得点は 0 とする．このゲームを k 回繰り返すとき，得点の合計を S_k とする．

(1) $S_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) S_3 が奇数となる確率を求めよ．

(3) $S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) p を実数とする．曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数を求めよ．

(2) 等式 $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_{-1}^{2} (xf(t) - t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

4 2つの実数 $a,\ b$ は $0<b<a$ を満たすとする．関数

$$f(x)=\frac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$$

の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す．ここで，e は自然対数の底である．

(1) $X(a,\ b)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} X(a,\ b)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} M(a,\ b)$ を求めよ．

5 点Oを原点とする座標平面において，点Aと点Bが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ を満たすとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ．

(2) 点Bから直線OAに下ろした垂線とOAとの交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対し，直線OA上の点Pを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる．同様に直線OB上の点Qを $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる．点Pを通り直線OAと直交する直線を ℓ_1 とし，点Qを通り直線OBと直交する直線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点をRとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ．

(4) 3点O，A，Bを通る円の中心をCとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

6 1個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点Pを動かすことを繰り返すゲームを考える．最初のPの位置を $a_0=0$ とし，さいころを n 回投げたあとのPの位置 a_n を次のルールで定める．

- $a_{n-1}=7$ のとき，$a_n=7$
- $a_{n-1}\neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+m & (a_{n-1}+m=1,3,4,5,6,7\ \text{のとき}) \\ 1 & (a_{n-1}+m=2,12\ \text{のとき}) \\ 14-(a_{n-1}+m) & (a_{n-1}+m=8,9,10,11\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_2=1$ となる確率を求めよ．

(2) $n\geqq 1$ について，$a_n=7$ となる確率を求めよ．

(3) $n\geqq 3$ について，$a_n=1$ となる確率を求めよ．

7 関数

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $S(t) = \displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく．このとき $S(t)$ の最大値を求めよ．

8 実数 a，b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a = \mathrm{Re}(z)$，$b = \mathrm{Im}(z)$ と表す．

(1) $z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) $z^{100} = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ．

(3) n を正の整数とする．$z^n = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする．$N > \dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ．

9 関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx - f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く．

(1) $f(x) = x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する．この $g(t)$ を求めよ．

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする．

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a < b$ ならば $f'(a) < f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ．

(3) s を実数とする．t が実数全体を動くとき，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ．

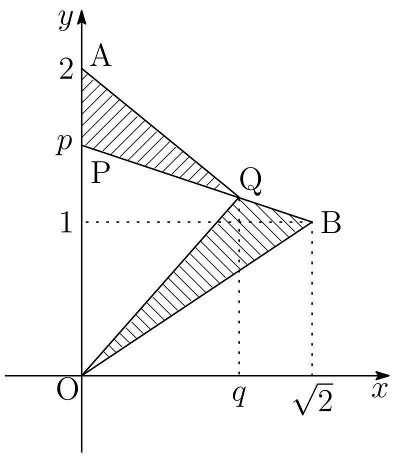
解答例

$\boxed{1}$ (1) 2点 $\mathrm{P}(0,\ p)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ を通る直線であるから

$$y-p=\frac{1-p}{\sqrt{2}-0}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{1-p}{\sqrt{2}}x+p}$$

(2) 点 Q の x 座標を q とする．面積について $\triangle\mathrm{APQ}=\triangle\mathrm{OBQ}$ より，$\triangle\mathrm{AOQ}=\triangle\mathrm{OBP}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot q=\frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2}\quad \text{ゆえに}\quad q=\frac{p}{\sqrt{2}}\quad \cdots ①$$



よって
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OBQ}&=\triangle\mathrm{OBP}-\triangle\mathrm{OQP}\\&=\frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot p\cdot\frac{p}{\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}p(2-p)}\end{aligned}$$

(3) ① より，$p=\sqrt{2}q$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$y=\frac{1-\sqrt{2}q}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}q$$

上式に $x=q$ を代入すると　$y=-q^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}q$

$\mathrm{Q}\left(q,-q^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}q\right)$ であるから $(0<q<\sqrt{2})$，点 Q の軌跡は

$$\text{放物線}\ \boldsymbol{y=-x^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}x\quad (0<x<\sqrt{2})}$$

■

2 (1) 2回の得点が2点と1点であるから

$$P(S_2 = 3) = \frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

(2) S_3 が奇数となるのは，3回とも奇数または1回だけ奇数であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{19}{54}}$$

(3) $P(S_2 = 4)$，$P(S_2 = 2)$ を求めると

$$P(S_2 = 4) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$
$$P(S_2 = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{13}{36}$$

これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}
P(S_4 = 8) &= P(S_2 = 4)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}\\
P(S_4 = 7) &= 2P(S_2 = 3)P(S_2 = 4) = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{81}\\
P(S_4 = 6) &= P(S_2 = 3)^2 + 2P(S_2 = 2)P(S_2 = 4)\\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2\cdot\frac{13}{36}\cdot\frac{1}{9} = \frac{5}{54}
\end{aligned}$$

したがって

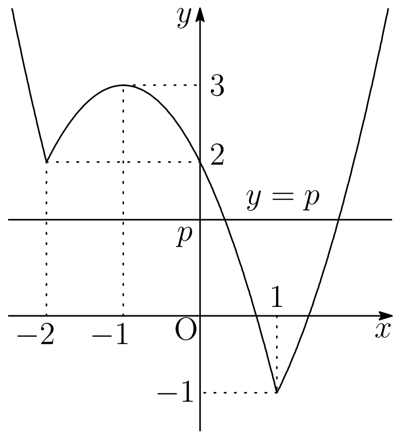
$$\begin{aligned}
P(S_4 \geqq 7) &= P(S_4 = 8) + P(S_4 = 7) = \frac{1}{81} + \frac{2}{81} = \frac{1}{27} < \frac{1}{9}\\
P(S_4 \geqq 6) &= P(S_4 \geqq 7) + P(S_4 = 6) = \frac{1}{27} + \frac{5}{54} = \frac{7}{54} > \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

よって，求める最小の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 7}$ ■

3 (1) 曲線 $y=|x^2+x-2|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数は，
曲線 $y=|x^2+x-2|-x$ と直線 $y=p$ の共有点の個数と等しい．

$$|x^2+x-2|-x=\begin{cases} x^2-2 & (x \leqq -2,\ 1 \leqq x) \\ -x^2-2x+2 & (-2 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

したがって，$y=|x^2+x-2|-x$ と $y=p$ のグラフは次のようになる．



よって，求める共有点の個数は

$\boldsymbol{p<-1}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{p=-1}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{-1<p<2}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{p=2}$ **のとき**	**3 個**
$\boldsymbol{2<p<3}$ **のとき**	**4 個**
$\boldsymbol{p=3}$ **のとき**	**3 個**
$\boldsymbol{3<p}$ **のとき**	**2 個**

(2) $a=\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=x^2+\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)\,dt=x^2+x\int_{-1}^{2}f(t)\,dt-\int_{-1}^{2}t\,dt$$
$$=x^2+ax-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2}=x^2+ax-\frac{3}{2}$$

したがって　$$a=\int_{-1}^{2}f(t)\,dt=\int_{-1}^{2}\left(t^2+at-\frac{3}{2}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-\frac{3}{2}t\right]_{-1}^{2}=\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}$$

これを解いて　$a=3$　よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3x-\dfrac{3}{2}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$ を微分すると $(0<b<a)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{b}\{-(a-b)e^{-(a-b)x}+ae^{-ax}\}\\&=\frac{(a-b)e^{-ax}}{b}\left(\frac{a}{a-b}-e^{bx}\right)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ となる x を X とすると

$$\frac{a}{a-b}-e^{bX}=0 \quad \text{ゆえに} \quad X=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$$

$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	X	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって，$f(x)$ の最大値を与える $X(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{X(a,\ b)=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}}$$

(2) $g(x)=\log\dfrac{a}{a-x}$ とおくと　$g(0)=0$

$$g'(x)=\frac{1}{a-x} \quad \text{ゆえに} \quad g'(0)=\frac{1}{a}$$

したがって

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{g(b)-g(0)}{b}=g'(0)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

(3) $M(a,\ b)=f(X)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)X}-e^{-aX})$ より

$$M(a,\ b)=e^{-aX}\cdot\frac{e^{bX}-1}{b}=e^{-aX}\cdot\frac{e^{bX}-1}{bX}\cdot X$$

$\varphi(t)=e^t$，$h=bX$ とおくと，$\displaystyle\lim_{b\to0}X=\frac{1}{a}$ であるから，$\displaystyle\lim_{b\to0}h=0$

$\varphi(0)=1$，$\varphi'(t)=e^t$ より $\varphi'(0)=1$ であるから

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\lim_{b\to+0}e^{-aX}\cdot\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}\cdot X=e^{-a\cdot\frac{1}{a}}\varphi'(0)\cdot\frac{1}{a}=\boldsymbol{\frac{1}{ae}}$$ ■

5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とする．

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \neq \pm 1$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる実数 k は存在しない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(3) PR//HB であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = s\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ とおくと (s は実数)

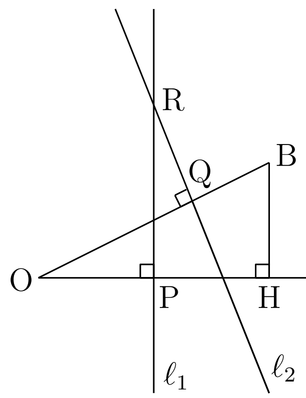
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{HB}} \\ &= t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad (*) \\ \overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} - (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (s+t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

OB⊥QR であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} = 0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (s+t-1)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 3\left(t - \frac{3}{5}s\right) + 2(s+t-1) = \frac{1}{5}s + 5t - 2 = 0\end{aligned}$$

ゆえに　$s = 10 - 25t$　これを $(*)$ に代入すると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (10-25t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$



(4) OA と OB の垂直二等分線の交点であるから，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

■

6 補足 0をスタート，7をゴールとするすごろくをモデルとした問題である．7を通過すると，多すぎた分だけ折り返し，次の回からは再び7を目指す．ただし，2に止まると1に戻る．一度7に到着するとその後の移動はない．

(1) $a_0=0$ より，1回目に出た m とそのときのPの移動先 a_1 は次のとおりである．

m	1	2	3	4	5	6
a_1	1	1	3	4	5	6

$a_1=1,3,4,5,6$ に対して，2回目に出た目 m とそのときのPの移動先 a_2 を表にすると，次のとおりである．

	$\boldsymbol{a_1}$				
$\boldsymbol{m}$	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	4	5	6	7
2	3	5	6	7	6
3	4	6	7	6	5
4	5	7	6	5	4
5	6	6	5	4	3
6	7	5	4	3	1

よって，求める確率は

$$P(a_1=1)\cdot\frac{1}{6}+P(a_1=6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2) $a_{n-1}=1,3,4,5,6,7$ に対して $(n\geqq 3)$，n 回目に出る目 m とそのときのPの移動先 a_n を表にすると，次のとおりである．

	$\boldsymbol{a_{n-1}}$					
$\boldsymbol{m}$	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	4	5	6	7	7
2	3	5	6	7	6	7
3	4	6	7	6	5	7
4	5	7	6	5	4	7
5	6	6	5	4	3	7
6	7	5	4	3	1	7

(1)の表と上の表から，$n\geqq 2$ のとき

- $a_{n-1}=7$ のとき，$a_n=7$
- $a_{n-1}\neq 7$ のとき，$\dfrac{1}{6}$ の確率で $a_n=7$

$a_n=7$ となる確率を p_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1}) \quad \text{ゆえに} \quad p_n-1=\frac{5}{6}(p_{n-1}-1)$$

$p_1=0$ であるから

$$p_n-1=(p_1-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \qquad \text{よって} \quad p_n=\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

別解　$a_1\neq 7$ である．2〜n 回において 7 にならない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である．

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

(3) (2) の表から，$a_n=1$ となる確率を x_n，$2\leqq a_n\leqq 5$ となる確率を y_n，$a_n=6$ となる確率を z_n とすると $(n\geqq 3)$，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} x_n&=\frac{1}{6}x_{n-1}+\frac{1}{6}z_{n-1}\\ y_n&=\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{1}{2}z_{n-1}\\ z_n&=\frac{1}{6}x_{n-1}+\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{1}{6}z_{n-1}\end{aligned} \qquad (*)$$

$x_n+y_n+z_n+p_n=1$ であるから，(2) の結果から

$$x_n+y_n+z_n=1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ から

$$\begin{aligned} y_n&=\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1})=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\ x_n+z_n&=\frac{1}{3}(x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1})=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\ -x_n+z_n&=\frac{1}{3}y_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

上の第 2 式から第 3 式の辺々を引くと

$$2x_n=\frac{2}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \qquad \text{求める確率は} \quad x_n=\boldsymbol{\frac{1}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \quad (n\geqq 3)}$$ ■

$\boxed{7}$ (1) $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}},\ \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと

$$f(x) = \left|\cos x - \sqrt{5}\sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{6}\left|\sin(x+\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin(x+\varphi) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$0 \leqq f(x) \leqq \sqrt{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$f(x)$ の最大値は　$\boldsymbol{\sqrt{6} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(2) $t = x + p$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = 1$

x	$0 \longrightarrow \quad 2\pi$
t	$p \longrightarrow 2\pi + p$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_p^{2\pi+p} f(t-p)\,dt \\ &= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_{2\pi}^{2\pi+p} f(t-p)\,dt \\ &= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_0^{p} f(t-p+2\pi)\,dt \\ &= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_0^{p} f(t-p)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t-p)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x-p)\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

これから次式も成立する．

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+p)\,dx = \int_p^{p+2\pi} f(x)\,dx \qquad (**)$$

$(*)$ において，$p=\varphi$ とし，$(**)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx\\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&= -\left[\ \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}+\left[\ \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\\
&= 2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\pi}$

(3) $S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ に対して

$$T(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x-\varphi)\,dx$$

とおくと，$S(t)$ の最大値は $T(t)$ の最大値と一致する．

$$T(t)=\sqrt{6}\int_t^{t+\frac{\pi}{3}}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx$$

t と $t+\dfrac{\pi}{3}$ の中央 $t+\dfrac{\pi}{6}$ が $\dfrac{3\pi}{2}$，すなわち，$t=\dfrac{4\pi}{3}$ のときであるから，
求める最大値は

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sqrt{6}\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&= \sqrt{6}\left[\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\ \right]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$\cdots$ ①

とすると　$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

また，i を極形式で表すと　$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 1,\quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　$r = 1$　$\cdots$ ②

また　$\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k = 0,\ 1,\ 2$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$\boldsymbol{z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\quad -i}$$

(2) z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

とすると　　$z^{100}=r^{100}(\cos 100\theta+i\sin 100\theta)$

また，i を極形式で表すと　　$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^{100}(\cos 100\theta+i\sin 100\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^{100}=1,\quad 100\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　　$r=1$

また　　$\theta=\dfrac{\pi}{200}+\dfrac{k}{50}\pi$

$\mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{Im}(z)\geqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{200}+\frac{k}{50}\pi\leqq\pi\quad\text{ゆえに}\quad\frac{197}{12}\leqq k\leqq\frac{199}{4}$$

これを満たす k は，$k=17,\ 18,\ \cdots,\ 49$ であるから　**33 個**

(3) z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると $(-\pi\leqq\theta<\pi)$

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

また，i を極形式で表すと　$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^n=1,\quad n\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=1$　また　$\theta=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{2k}{n}\pi$

$\mathrm{Re}(z)\geqq\dfrac{1}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{2n}+\frac{2k}{n}\pi\leqq\frac{\pi}{3}\quad\text{ゆえに}\quad -\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{n}{6}-\frac{1}{4}$$

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}$ は整数ではないから

$$A=\left[-\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\right],\quad B=\left[\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\right]$$

とすると　$N=B-A$

- $n\equiv 0 \pmod 6$ のとき，

$$A=-\frac{n}{6}-1,\quad B=\frac{n}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 1 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-1}{6}-\dfrac{5}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-1}{6}-\dfrac{1}{12}$ より

$$A=-\frac{n-1}{6}-1,\quad B=\frac{n-1}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 2 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-2}{6}-\dfrac{7}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-2}{6}+\dfrac{1}{12}$ より

$$A=-\frac{n-2}{6}-1,\quad B=\frac{n-2}{6} \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n+1}{3}>\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 3 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-3}{6}-\dfrac{3}{4}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-3}{6}+\dfrac{1}{4}$ より

$$A=-\frac{n-3}{6}-1,\quad B=\frac{n-3}{6} \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 4 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n+2}{6}+\dfrac{1}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+2}{6}-\dfrac{7}{12}$ より

$$A=-\frac{n+2}{6},\quad B=\frac{n+2}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 5 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n+1}{6}-\dfrac{1}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+1}{6}-\dfrac{5}{12}$ より

$$A=-\frac{n+1}{6}-1,\quad B=\frac{n+1}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n+1}{3}>\frac{n}{3}$$

したがって　$n\equiv 2,\ 5 \pmod 6$　すなわち　$\boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 3}$　■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\phi(x) = tx - x^4$ とすると　$\phi'(x) = t - 4x^3$

$\phi'(x) = 0$ の解を c とすると　$c = \left(\dfrac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\phi(x)$ の増減は，次のようになる．

x	$\cdots$	c	$\cdots$
$\phi'(x)$	$+$	0	$-$
$\phi(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$\phi(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$$g(t) = \phi(c) = tc - c^4 = t\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$= 4\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \mathbf{3}\left(\boldsymbol{\frac{t}{4}}\right)^{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}$$

(2) $\varphi(x) = tx - f(x)$ とすると　$\varphi'(x) = t - f'(x)$

条件 (i) から，$\varphi'(x)$ は単調減少

条件 (ii) から，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) = -\infty$

したがって，$\varphi'(d) = 0$ を満たす d がただ一つ存在する．

$\varphi(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	d	$\cdots$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ をもつ．

(3) 条件から，s の関数 $ts - f(s)$ は，最大値 $g(t)$ をもつから

$$ts - f(s) \leqq g(t) \quad \text{ゆえに} \quad st - g(t) \leqq f(s)$$

上の第 2 式から，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ である．　■