令和４年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・
  園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学 (化学・生物・植物生命・人間)
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ (80 分) 数 I・II・A・B
- 教育学部 (中学数学) $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ (150 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・
  園芸 (園芸，応用生命，緑地環境)・先進科学 (物理・工学)
  $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円周を 12 等分するように点 A_1，A_2，$A_3, \cdots, A_{12}$ が時計回りに並んでいる．また，白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある．点 P を，次の操作によって 12 個の点上を移動させる．

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる．白球ならば時計回りに，黒球ならば反時計回りに，サイコロの目の数だけ P を移動させる．取り出した球は袋に戻さないこととする．

P を最初に点 A_1 に置く．操作を 1 回行い，P が A_1 から移動した点を Q とおく．続けて操作を 1 回行い，P が Q から移動した点を R とおく．もう一度操作を行い，P が R から移動した点を S とおく．

(1) $R = A_1$ となる確率を求めよ．

(2) 3 点 Q，R，S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面において，原点 O と点 A$(1,\ 0)$ と点 B$(0,\ 1)$ がある．$0 < t < 1$ に対し，線分 BO，OA，AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点を P，Q，R とする．

(1) $\triangle$PQR の面積を t の式で表せ．

(2) $\triangle$PQR が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ．

(3) $\theta = \angle$RPQ とする．(2) のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．$y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする．$S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

4 0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し，以下の操作を行うこととする．ただし，4 桁で表示するとは，整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0，10 以上 99 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0，1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0，そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである．

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ替える．さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ替える．

また，整数 L に対し，操作によって得られた整数を $\overline{L}$ とする．

(1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし，$M = 100x + y$ のように整数 x, y $(0 \leqq x \leqq 99,\ 0 \leqq y \leqq 99)$ を用いて表す．操作によって得られた $\overline{M}$ が M の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば，$-197x + 298y = 9$ が成り立つことを証明せよ．

(2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば，操作によって得られた整数 $\overline{N}$ は N の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ．

5 n を自然数とする．n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく．

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ．

(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ．

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ．

6 座標空間において，原点 O と点 A$(1,\ 0, -1)$ と点 B$(0,\ 5,\ 0)$ がある．実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を ℓ とする．また，xy 平面上の $y = x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 P$(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する．ℓ 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる．このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2) 曲線 C 上の点 R と ℓ 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ．また，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ の値を求めよ．

7 x，y について方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9$$

に関する次の問いに答えよ．

(1) x，y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものを求めよ．

(2) 数列 a_1，a_2，$a_3, \cdots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．このとき，$(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすならば，$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) $(*)$ の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ．

8 正の整数 m，n に対して，

$$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$$

とおく．

(1) $e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ．

(2) 各 m に対して，$b_m = \displaystyle\lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．

(3) 各 n に対して，$c_n = \displaystyle\lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．

9 r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える．

(1) $r = 1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ．

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ．

条件：$0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する．

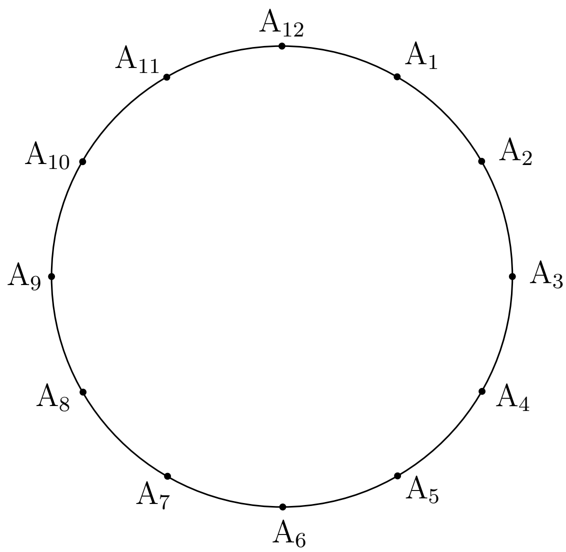
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 「白球と黒球を1個ずつ取り出し，1〜5の同じ目のサイコロが2回連続して出る」事象を A とし,「6の目が2回連続して出る」事象を B とすると

$$P(A)=\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)\times 5\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2,\quad P(B)=\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

求める確率は $P(A\cup B)$ で，A と B は互いに排反であるから

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{11}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2=\mathbf{\frac{11}{108}}$$



(2) 3個の球を「黒球，白球，白球」または「白球，黒球，黒球」または「黒球，黒球，黒球」の順序で取り出す事象を C とすると

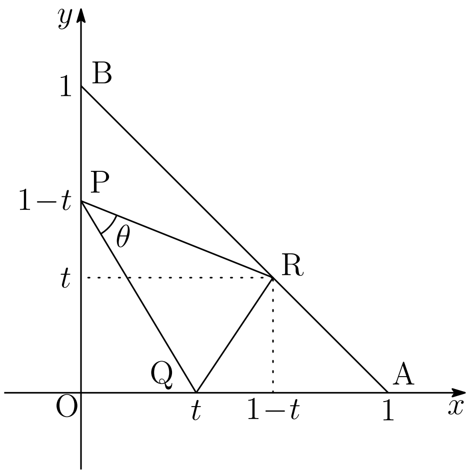
$$P(C)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{7}{15}$$

サイコロの2回目と3回目がともに4の目が出る事象を D とすると

$$P(D)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

求める確率は $\quad P(C\cap D)=P(C)P(D)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{7}{540}}$ ■

2 (1) 条件より，P$(0,\ 1-t)$，Q$(t,\ 0)$，R$(1-t,\ t)$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (t,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (1-t,\ 2t-1)$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}|t(2t-1)-(t-1)(1-t)|$$
$$= \frac{1}{2}|3t^2-3t+1|$$

ここで　$3t^2-3t+1 = 3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} > 0$

よって　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(3t^2-3t+1)}$

別解 直線 PR : $y = \dfrac{2t-1}{1-t}x+1-t$ と直線 $x=t$ の交点の y 座標は

$$y = \frac{2t-1}{1-t}t+1-t = \frac{3t^2-3t+1}{1-t}$$

これと点 R の x 座標 $1-t$ より

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{3t^2-3t+1}{1-t} = \frac{1}{2}(3t^2-3t+1)$$

(2) P$(0,\ 1-t)$，Q$(t,\ 0)$，R$(1-t,\ t)$ より $(0<t<1)$

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2+(1-t)^2 = 2t^2-2t+1,$$
$$\mathrm{QR}^2 = (1-2t)^2+t^2 = 5t^2-4t+1,$$
$$\mathrm{RP}^2 = (t-1)^2+(1-2t)^2 = 5t^2-6t+2$$

PQ $=$ QR のとき　$2t^2-2t+1 = 5t^2-4t+1$

$3t^2-2t=0$　ゆえに　$t(3t-2)=0$　すなわち　$t=\dfrac{2}{3}$

QR $=$ RP のとき　$5t^2-4t+1 = 5t^2-6t+2$

$2t-1=0$　すなわち　$t=\dfrac{1}{2}$

RP $=$ PQ のとき　$5t^2-6t+2 = 2t^2-2t+1$

$3t^2-4t+1=0$　ゆえに　$(t-1)(3t-1)=0$　すなわち　$t=\dfrac{1}{3}$

よって　$\boldsymbol{t = \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}}$

(3) θ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ t-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-t,\ 2t-1)$ のなす角であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\frac{t(1-t)+(t-1)(2t-1)}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}\sqrt{(1-t)^2+(2t-1)^2}}$$
$$=\frac{(1-t)^2}{\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}$$

よって　$t=\dfrac{2}{3}$のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

$t=\dfrac{1}{2}$のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$t=\dfrac{1}{3}$のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=ax$ と $y=x|x-2|$ の 2 式から y を消去すると

$$ax=x|x-2| \quad \text{ゆえに} \quad x(a-|x-2|)=0$$

交点の x 座標は　$a<0$ のとき　$x=0$,
$a \geqq 0$ のとき　$x=0,\ 2\pm a$

したがって，交点の x 座標の個数は

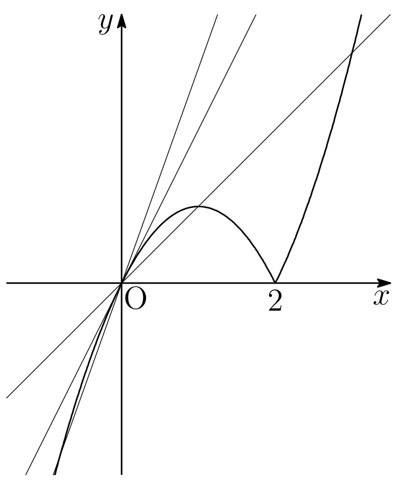
$a<0$ のとき　1 個,
$a=0,\ 2$ のとき　2 個,
$0<a<2,\ 2<a$ のとき　3 個

よって，求める a の範囲は　$\boldsymbol{0<a<2,\ 2<a}$

別解 $y=x|x-2|$ の $x=0$ における接線の傾きは，
$y=x(2-x)$ より $y'=2-2x$ であるから

$$x=0 \text{ のとき} \quad y'=2$$

したがって，$y=x|x-2|$ の $x=0$ における
接線の方程式は　$y=2x$

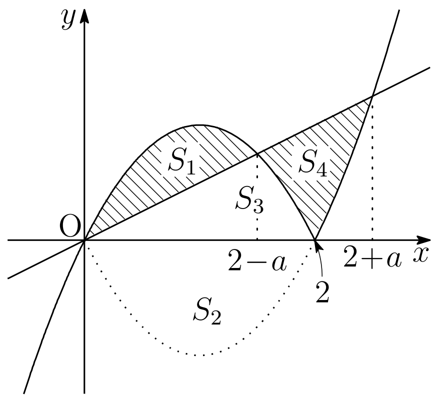


$a<0$ のとき　1 個,
$a=0,\ 2$ のとき　2 個,
$0<a<2,\ 2<a$ のとき　3 個

よって，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<2,\ 2<a}$$

(2) 右の図の S_1〜S_4 の面積は，(1) で求めた交点の x 座標および x^2 の係数により



$$S_1 = \frac{1}{6}(2-a)^3,$$

$$S_2 = \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3},$$

$$S_3 = S_2 - S_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(2-a)^3,$$

$$S_4 = \frac{1}{6}(2+a)^3 - (S_2 + S_3)$$

$S_2 + S_3 = \dfrac{4}{3} + \left\{\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(2-a)^3\right\} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{6}(2-a)^3$ であるから

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{6}(2+a)^3 - (S_2+S_3) \\ &= \frac{1}{6}(2+a)^3 - \left\{\frac{8}{3} - \frac{1}{6}(2-a)^3\right\} \\ &= \frac{1}{6}(2+a)^3 + \frac{1}{6}(2-a)^3 - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} S(a) = S_1 + S_4 &= \frac{1}{6}(2-a)^3 + \frac{1}{6}(2+a)^3 + \frac{1}{6}(2-a)^3 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{1}{3}(2-a)^3 + \frac{1}{6}(2+a)^3 - \frac{8}{3} \\ &= \boldsymbol{-\frac{a^3}{6} + 3a^2 - 2a + \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S'(a) = -\dfrac{a^2}{2} + 6a - 2 = -\dfrac{1}{2}(a^2 - 12a + 4)$

$0 < a < 2$ に注意して，$S'(a) = 0$ を解くと　$a = 6 - 4\sqrt{2}$

したがって，$S(a)$ の増減表は

a	(0)	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{6 - 4\sqrt{2}}$ ■

4 (1) $M=100x+y$ より，$\overline{M}=100y+x$ であるから，これらを

$$\overline{M}=\frac{2}{3}M+3$$

に代入すると

$$100y+x=\frac{2}{3}(100x+y)+3 \quad \text{整理すると} \quad -197x+298y=9$$

(2) $N=100x+y$ より，$\overline{N}=100y+x$ であるから，これらを

$$\overline{N}=\frac{2}{3}N+1$$

に代入すると

$$100y+x=\frac{2}{3}(100x+y)+1 \quad \text{整理すると} \quad -197x+298y=3 \qquad (*)$$

ユークリッドの互除法[1]により，298 と 197 の最大公約数は，1 である．

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & 19 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \cline{3-9} 5 &) & 96 &) & 101 &) & 197 &) & 298 \\ & & 95 & & 96 & & 101 & & 197 \\ \cline{3-9} & & 1 & & 5 & & 96 & & 101 \end{array}$$

$P=298,\ Q=197,\ a=101,\ b=96,\ c=5$ とおくと

$$P=Q+a, \quad Q=a+b, \quad a=b+c, \quad b=19c+1$$

これより，$1=b-19c,\quad c=a-b,\quad b=Q-a,\quad a=P-Q$ であるから

$$\begin{aligned} 1&=b-19c=b-19(a-b)\\ &=-19a+20b=-19a+20(Q-a)\\ &=20Q-39a=20Q-39(P-Q)\\ &=-39P+59Q \end{aligned}$$

$(*)$ は $-Qx+Py=3$ であるから，上式より

$$-Qx+Py=3(-39P+59Q) \quad \text{ゆえに} \quad P(y+117)=Q(x+177)$$

$x+177$ は 298 $(=P)$ を因数にもつから，整数 k を用いて

$$x+177=298k \quad \text{ゆえに} \quad x=298k-177$$

$k=0$ のとき $x=-177$，$k=1$ のとき $x=121$ となり，$0 \leqq x \leqq 99$ を満たす整数 x，すなわち，条件を満たす N は存在しない． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.18 を参照)

5 M が 3 で割り切れない事象を A，M が 2 で割り切れない事象を B，M が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない事象を C，M が 4 で割り切れる事象を D とする．

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率は，n 個のサイコロの出た目がすべて 1 または 5 の確率であるから

$$P(A \cap B) = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

(2) n 個のサイコロの中で 1 個だけ 2 の目が出て，残りの $n-1$ 個は 1 または 5 の目が出る確率であるから

$$P(A \cap C) = {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{n}{2 \cdot 3^n}}$$

(3) M が 3 で割り切れない確率は

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &= \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1} - 2 - n}{2 \cdot 3^n}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) A$(1,\ 0, -1)$，B$(0,\ 5,\ 0)$ より，ℓ 上の点は (t は実数)

$$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(1,\ 0,-1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

ℓ 上の点 Q を $(q,\ 5,-q)$ とおくと，P$(a,\ a^2,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a-q,\ a^2-5,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから

$$1(a-q)+0\cdot(a^2-5)+(-1)\cdot q=0 \quad \text{ゆえに} \quad q=\frac{a}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ 5, -\frac{a}{2}\right)}$

(2) (1) の結果から，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ が最小になるとき，点 R$(a,\ a^2,\ 0)$ に対して，

$$\mathrm{S}\left(\frac{a}{2},\ 5,-\frac{a}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2&=\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+(5-a^2)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2\\&=a^4-\frac{19}{2}a^2+25\\&=\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ は，$a=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{39}}{4}}$ をとる．このとき

$$\mathbf{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\quad \mathbf{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)$$ **(複号同順)**

補足 C 上の点 R の座標を $(r,\ r^2,\ 0)$，ℓ 上の点 S の座標を $(s,\ 5, -s)$ とする．
2 変数関数

$$f(r,\ s) = |\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2 = (s-r)^2 + (5-r^2)^2 + s^2$$

を考えると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}f(r,\ s) = 2(r-s) + 4r(r^2-5) = 4r^3 - 18r - 2s, \\
&\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(r,\ s) = 12r^2 - 18, \\
&\frac{\partial}{\partial s}f(r,\ s) = 2(s-r) + 2s = 4s - 2r, \\
&\frac{\partial^2}{\partial s^2}f(r,\ s) = 4
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial}{\partial r}f(r,\ s) = \dfrac{\partial}{\partial s}f(r,\ s) = 0$ とすると

$$4r^3 - 18r - 2s = 4s - 2r = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r = 2s = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

このとき $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}f(r,\ s) < 0,\quad \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}f(r,\ s) < 0$

したがって，このとき極小値 (最小値) をとる[2]. ■

$\boxed{7}$ (1) $(*)$ に順次 $y = 1, 2, 3$ を代入すると

$y = 1$ のとき　$x^2 - 6x - 8 = 0$　ゆえに　$x = 3 \pm \sqrt{17}$
$y = 2$ のとき　$x^2 - 12x - 5 = 0$　ゆえに　$x = 6 \pm \sqrt{41}$
$y = 3$ のとき　$x^2 - 18x = 0$　ゆえに　$x = 0,\ 18$

$(*)$ を満たす正の整数 $(x,\ y)$ の組で，y が最小のものは

$$\boldsymbol{(x,\ y) = (18,\ 3)}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2018.pdf (p.11 を参照)

(2) $(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすとき

$$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}a_n+a_n{}^2=9$$

与えられた漸化式から　　$a_n=6a_{n+1}-a_{n+2}$

上の 2 式から a_n を消去すると

$$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}(6a_{n+1}-a_{n+2})+(6a_{n+1}-a_{n+2})^2=9$$

上式の左辺を整理すると

$$a_{n+2}{}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}{}^2=9$$

よって，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たす.

(3) $a_1=3$，$a_2=18$ とおくと $(x,\ y)=(a_2,\ a_1)$ は $(*)$ を満たす.
次の命題 (A) が成立することを示す.

(A)　すべての自然数 n について　$a_{n+1}>a_n>0$

与えらえた漸化式から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)+4a_n \qquad (**)$$

［1］$a_2>a_1>0$ であるから，$n=1$ のとき (A) は成立する.
［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(**)$ より

$$a_{k+2}>a_{k+1}>0$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する.

［1］,［2］より，(A) が成立する.
よって，(2) の結果と (A) により，$(*)$ の整数解は無数にある.

補足 $\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix},\ a_2=18,\ a_1=3,\ a_0=0$

$$\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

ゆえに　$a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}{}^2=-9$　　よって　$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}a_n+a_n{}^2=9$ ■

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ において　$x^m e^{-\frac{1}{n}} \leqq x^m e^{-x} \leqq x^m$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-\frac{1}{n}}\,dx = e^{-\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = e^{-\frac{1}{n}} \left[\ \frac{x^{m+1}}{m+1}\ \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{(m+1)n^{m+1}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = \left[\ \frac{x^{m+1}}{m+1}\ \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(m+1)n^{m+1}}$$

したがって　$$\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{(m+1)n^{m+1}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{(m+1)n^{m+1}} \qquad (*)$$

$$e^{-\frac{1}{n}} \leqq (m+1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq 1$$

よって　$$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$$

(2) (1) の結果について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,\ n) = \mathbf{1}$$

(3) $A(m,\ n)$ について

$$\begin{aligned}
A(m,\ n) &= (m+1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \\
&= n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} (x^{m+1})' e^{-x}\,dx \\
&= n^{m+1} \left[\ x^{m+1} e^{-x}\ \right]_0^{\frac{1}{n}} - n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1} (e^{-x})'\,dx \\
&= e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1} \int_0^{m+1} x^{m+1} e^{-x}\,dx
\end{aligned}$$

したがって　$$\left| A(m,\ n) - e^{-\frac{1}{n}} \right| = n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1} e^{-x}\,dx$$

$(*)$ により　$$\left| A(m,\ n) - e^{-\frac{1}{n}} \right| \leqq n^{m+1} \cdot \frac{1}{(m+2)n^{m+2}} = \frac{1}{(m+2)n}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(m+2)n} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n) = \boldsymbol{e^{-\frac{1}{n}}}$$

$\boxed{9}$ (1) $r=1$ のとき　$f(x)=x+(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\sin x\cos x \\ &= 1-\frac{\sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$-1 \leqq \sin 2x \leqq 1$，$0 < \dfrac{1}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) = 1-\frac{1}{2} \geqq \frac{1}{2} > 0$$

よって，$f(x)$ はつねに増加する．

(2) $f(x)=x+r(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ より，(1) と同様にして

$$f'(x) = 1-\frac{r\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sin x\cos x < 0$ のとき　$f'(x) > 0$

$\sin x\cos x \geqq 0$ のとき

$$f'(x) = 1-r\sqrt{\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^3}} = 1-r\sqrt{\frac{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^3}} \qquad (*)$$

ここで，$t=\sin^2 x$ とし

$$g(t) = \frac{t(1-t)}{(1+t)^3} = (t-t^2)(1+t)^{-3}$$

とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= (1-2t)(1+t)^{-3}+(t-t^2)\cdot(-3)(1+t)^{-4} \\ &= \frac{(1-2t)(1+t)-3(t-t^2)}{(1+t)^4} = \frac{t^2-4t+1}{(t+1)^4} \end{aligned}$$

t の値の範囲に注意して $g'(t)=0$ を解くと　$t=2-\sqrt{3}$

$g(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} g(2-\sqrt{3}) &= \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(3-\sqrt{3})^3} = \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3})^3(\sqrt{3}-1)^3} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$(*)$ より，常に $f'(x) \geqq 0$ であるための条件は

$$1 - r\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{3}}} \geqq 0 \quad ゆえに \quad 0 < r \leqq \sqrt{6\sqrt{3}}$$

よって，$0 < r < c$ を満たす最大の実数 c は $\boldsymbol{c = \sqrt{6\sqrt{3}}}$ ■