令和３年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部 (食糧自然経済) は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ (80 分) 数 I・II・A・B
- 教育学部 (中学数学) は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{8}$ (150 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・園芸学部 (園芸，応用生命，緑地環境) $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{8}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{9}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{9}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 定数 a は $\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{1}{4}$ を満たすとする．座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす．

- 2 点 A，B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある．
- 2 点 C，D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある．
- 2 点 A，D の x 座標は等しく，かつ正である．
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい．

点 A の x 座標を t とする．長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする．

(1) S を t の式で表せ．

(2) S の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上に半径がそれぞれ $a^2,\ b^2,\ c^2\ (0 < a < b < c)$ の 3 つの円 A，B，C および直線 ℓ がある．3 つの円はどれも直線 ℓ に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする．

(1) c を a と b を用いて表せ．

(2) 数列 a，b，c が等比数列となるとき，その公比を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている．以下のゲームを n 回続けて行う．

> 袋から 1 個の球を取り出す．それが白球ならば 1 点獲得する．黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない．袋から取り出した球は戻さない．

(1) $n = 2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ．

(2) $n = 3$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ m を正の整数とする．座標平面上の点 $(x,\ y)$ で

$$xn^3 + yn^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

がすべて整数であるようなものは，連立不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている．以下のゲームを n 回続けて行う．

> 袋から 1 個の球を取り出す．それが白球ならば 1 点獲得する．黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない．袋から取り出した球は戻さない．

(1) $n = 2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ．

(2) $n = 4$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ．

(3) $n = 10$ の場合，総得点が 8 点以上となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ および 3 点 $\mathrm{A}(-1, -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$ がある．曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする．ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする．また，直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする．

(1) 点 P が曲線 C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

(2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $w = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする．ただし，i は虚数単位である．z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)$$
$$= z^5 - \frac{1}{z^5}$$

(2) ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right) = C\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ．また，C の値を求めよ．

(3) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = a\log x + b$ は，x 座標が t $(0 < t < 1)$ の点で接していて，$a \neq 0$ であるとする．ただし，2 曲線が点 P で接するとは，P を共有し，P における接線が一致することである．

(1) a および b を t の式で表せ．

(2) 曲線 C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_1(t)$ を求めよ．

(3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_2(t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 多項式 $f_n(x),\ g_n(x)\ (n=1,2,3,\cdots)$ を条件

$$f_1(x)=x,\quad g_1(x)=1,$$
$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)$$

で定める．

(1) 正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\quad \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta=f_n(\tan\theta)\cos^n\theta,\quad \cos n\theta=g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ．

(3) 正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{1}{4}$ のとき，2 点 $\mathrm{A}(t, -t^2+2a)$，$\mathrm{D}(t,\ 2t^2-a)$ の y 座標から $(t>0)$

$$-t^2+2a > 2t^2-a \quad \text{ゆえに} \quad 0 < t < \sqrt{a}$$

2 つの放物線 $y=-x^2+2a$ と $y=2x^2-a$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+2a = 2x^2-a \quad \text{ゆえに} \quad x = \pm\sqrt{a}$$

放物線 $y=2x^2-a$ の x 軸との共有点の x 座標は　$x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

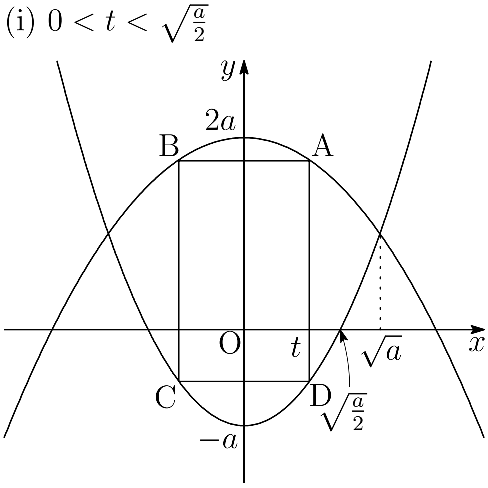
(i) $0 < t < \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき，2 点 A，D の y 座標をそれぞれ y_1，y_2 とすると

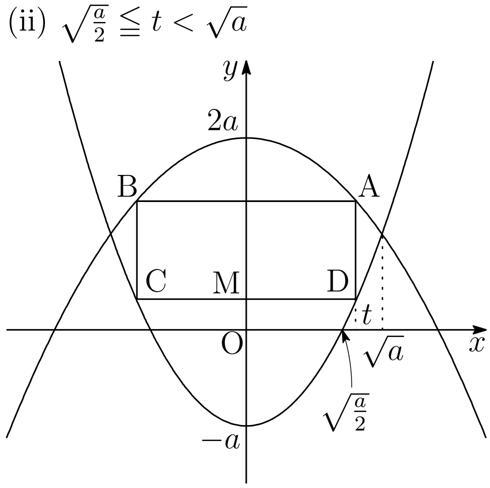
$$\begin{aligned}|y_1|-|y_2| &= |-t^2+2a|-|2t^2-a| \\ &= -t^2+2a-(-2t^2+a) = t^2+a > 0\end{aligned}$$

したがって　$S = \pi\mathrm{OA}^2 = \pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}$
$= \pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{2}} \leqq t < \sqrt{a}$ のとき，辺 CD と y 軸との交点を M とすると

$$\begin{aligned}S &= \pi\mathrm{OA}^2-\pi\mathrm{OM}^2 = \pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}-\pi(2t^2-a)^2 \\ &= \pi(-3t^4+t^2+3a^2)\end{aligned}$$





(i), (ii) より　$\boldsymbol{S = \begin{cases} \pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\} & \left(0 < t < \sqrt{\dfrac{a}{2}}\right) \\ \pi(-3t^4+t^2+3a^2) & \left(\sqrt{\dfrac{a}{2}} \leqq t < \sqrt{a}\right)\end{cases}}$

(2) $u=t^2$ とおくと，(1) の結果から

$$S=\begin{cases}\pi\{u^2-(4a-1)u+4a^2\} & \left(0<u<\dfrac{a}{2}\right)\\ \pi(-3u^2+u+3a^2) & \left(\dfrac{a}{2}\leqq u<a\right)\end{cases}$$

［1］ $0<u<\dfrac{a}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$ より，$\dfrac{4a-1}{2}<0$ であるから

$$S=\pi\left\{\left(u-\frac{4a-1}{2}\right)^2+2a-\frac{1}{4}\right\}$$

は単調増加である．

［2］ $\dfrac{a}{2}\leqq u<a$ のとき，$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$ より，$\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{6}<a$ であるから

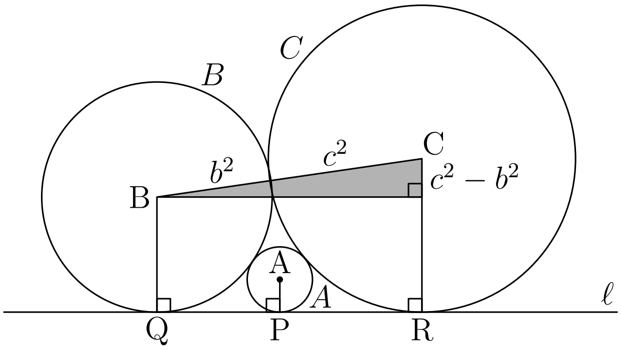
$$S=\pi\left\{-3\left(u-\frac{1}{6}\right)^2+3a^2+\frac{1}{12}\right\}$$

は，$u=\dfrac{1}{6}$ のとき，最大値 $\left(3a^2+\dfrac{1}{12}\right)\pi$ をとる．

［1］，［2］から，S は $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\left(3a^2+\dfrac{1}{12}\right)\pi}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 3 つの円 A, B, C の中心をそれぞれ A，B，C とし，これらの 3 点から ℓ に垂線 AP，BQ，CR を引くと，下の図から

$$\mathrm{QR}^2 = (b^2 + c^2)^2 - (c^2 - b^2)^2 \quad ゆえに \quad \mathrm{QR} = 2bc$$



同様に　　$\mathrm{PQ} = 2ab$,　$\mathrm{PR} = 2ca$

$\mathrm{PQ} + \mathrm{PR} = \mathrm{QR}$ であるから

$$2ab + 2ca = 2bc \quad ゆえに \quad ab + ca = bc \qquad (*)$$

$a \neq b$ より　　$\boldsymbol{c = \dfrac{ab}{b-a}}$

(2) 数列 a, b, c の公比を r とすると $(r > 1)$

$$b = ar, \quad c = ar^2$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$a{\cdot}ar + ar^2{\cdot}a = ar{\cdot}ar^2 \quad 整理すると \quad a^2r(r^2 - r - 1) = 0$$

$a \neq 0$, $r > 1$ に注意して　　$\boldsymbol{r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

3 (1) ゲームを2回続けたとき，球の色の組合せは

$$\{白,\ 白\},\quad \{白,\ 黒\},\quad \{黒,\ 黒\} \qquad \text{(A)}$$

であり，その確率は，順に

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9},\quad \frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{9},\quad \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

(A) のそれぞれの場合に，得点が2点となる条件付き確率は，順に

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

よって，求める確率は $\dfrac{2}{9}\cdot 1+\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{35}{81}}$

(2) ゲームを3回続けたとき，球の色の組合せは

$$\{白,\ 白,\ 白\},\quad \{白,\ 白,\ 黒\},\quad \{白,\ 黒,\ 黒\},\quad \{黒,\ 黒,\ 黒\} \quad \text{(B)}$$

であり，その確率は，順に

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12},\quad \frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12},\quad \frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{12},\quad \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$$

(B) のそれぞれの場合に，得点が2点以上となる条件付き確率は，順に

$$1,\quad 1,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}=\frac{7}{27}$$

よって，求める確率は $\dfrac{1}{12}\cdot 1+\dfrac{5}{12}\cdot 1+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{7}{27}=\mathbf{\dfrac{61}{81}}$

別解 (B) のそれぞれの場合に，得点が1点以下となる条件付き確率は，順に

$$0,\quad 0,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},\quad 3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

したがって，得点が1点以下となる確率は $\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{20}{27}=\dfrac{20}{81}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1-\dfrac{20}{81}=\mathbf{\dfrac{61}{81}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) m は整数．座標平面上の点 $(x,\ y)$ について $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq m)$

$$(*) \quad xn^3 + yn^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が整数であるから，$n=1$ と $n=p$ (p は素数) について，$(*)$ が整数である条件を調べればよい．

- $n=1$ のとき　$x+y$ が整数　$\cdots$①
- $n=p$ のとき

$$xp^3 + yp^2 = p^2(p-1)x + p^2(x+y)$$

　が整数であるから，上式および①より

$$(**) \quad p^2(p-1)x \text{ が整数}$$

まず $p=2,\ 3$ をそれぞれ $(**)$ に代入すると

$$4x \text{ が整数},\quad 18x = 4{\cdot}4x + 2x \text{ が整数}\quad \text{すなわち}\quad 2x \text{ が整数}$$

$p \neq 2$ のとき，$p-1$ は偶数であるから，$(**)$ は，すべて $2x$ の倍数である．
また，$x+y$ が整数であるから，$(x,\ y)$ は，次の (i)，(ii) の場合がある．

(i) $x=k$ のとき $(k=0, 1, 2, \cdots, m)$

$$y = 0, 1, 2, \cdots, m-k$$

(ii) $x = \dfrac{2k-1}{2}$ のとき $(k = 1, 2, \cdots, m)$

$$y = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}, \cdots, \frac{2m+1-2k}{2}$$

したがって，求める個数を N とすると

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{m}(m+1-k) + \sum_{k=1}^{m}(m+1-k) \\ &= m+1+2\sum_{k=1}^{m}(m+1-k) \\ &= m+1+2\sum_{k=1}^{m}k \\ &= m+1+2{\cdot}\frac{1}{2}m(m+1) = \boldsymbol{(m+1)^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{3}$ (1) 参照

(2) ゲームを 4 回続けたとき，白球が k 回出る確率を p_k とすると $(0 \leqq k \leqq 4)$

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{42} \\
p_1 &= \frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{5\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{5}{21} \\
p_2 &= \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{5\cdot4\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{10}{21} \\
p_3 &= \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot5}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{5}{21} \\
p_4 &= \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

それぞれの k に対し，得点が 2 点以上となる条件付き確率を q_k とすると

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} + \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{11}{27}, \\
q_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} + \frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{27}, \\
q_2 &= q_3 = q_4 = 1
\end{aligned}
$$

よって，求める確率は

$$
\sum_{k=0}^{4} p_k q_k = \frac{1}{42}\cdot\frac{11}{27} + \frac{5}{21}\cdot\frac{19}{27} + \frac{10}{21}\cdot1 + \frac{5}{21}\cdot1 + \frac{1}{42}\cdot1 = \mathbf{\frac{173}{189}}
$$

別解 それぞれの k に対し，得点が 1 点以下となる条件付き確率を r_k とすると

$$
r_0 = \frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{27}, \qquad r_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}
$$

得点が 1 点以下となる確率は　$p_0r_0 + p_1r_1 = \dfrac{1}{42}\cdot\dfrac{16}{27} + \dfrac{5}{21}\cdot\dfrac{8}{27} = \dfrac{16}{189}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{16}{189} = \mathbf{\dfrac{173}{189}}$

(3) すべての球を取り出すから，白球が 5 点で黒球が 3 点以上であるから

$$
\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \mathbf{\frac{17}{81}}
$$

$\boxed{6}$ (1) 2 点 $\mathrm{A}(-1, -1)$，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を通る直線の方程式は

$$y+1=\frac{\frac{1}{t}+1}{t+1}(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{x}{t}+\frac{1}{t}-1$$

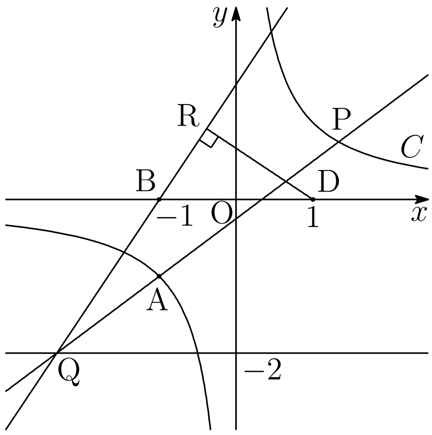
直線 AP と直線 $y=-2$ の交点 Q の x 座標は

$$\frac{x}{t}+\frac{1}{t}-1=-2 \quad \text{これを解いて} \quad x=-t-1$$

2 点 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-t-1, -2)$ を通る直線の方程式は

$$y=\frac{-2-0}{-t-1-(-1)}(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{2}{t}(x+1) \quad \cdots①$$

点 $\mathrm{D}(1,\ 0)$ を通り，直線 BQ に垂直な直線は　$y=-\dfrac{t}{2}(x-1)\cdots②$



①，② から y を消去すると

$$\frac{2}{t}(x+1)=-\frac{t}{2}(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{t^2-4}{t^2+4} \quad \cdots③$$

これを ① に代入すると　$y=\dfrac{4t}{t^2+4}$　$\cdots④$

③，④ から

$$x^2+y^2=\left(\frac{t^2-4}{t^2+4}\right)^2+\left(\frac{4t}{t^2+4}\right)^2=1$$

C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ について，$t\neq 0$ であるから，④ より　$y\neq 0$

よって，点 R の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$　$\boldsymbol{(y\neq 0)}$

別解 $\dfrac{2}{t} = \tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$，③，④ より

$$x = \frac{1-\left(\frac{2}{t}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{t}\right)^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$$
$$y = \frac{2\cdot\frac{2}{t}}{1+\left(\frac{2}{t}\right)^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < 0,\ 0 < 2\theta < \pi$　よって　$\boldsymbol{x^2+y^2=1 \quad (y \neq 0)}$

補足 R は BD を直径の両端とする円周上の点である．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(t,\ \frac{1}{t}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(\frac{t^2-4}{t^2+4},\ \frac{4t}{t^2+4}\right)$$

直線 PR が原点 O を通るから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より

$$t\cdot\frac{4t}{t^2+4} - \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-4}{t^2+4} = 0 \quad \text{整理すると} \quad 4t^3 - t^2 + 4 = 0$$

$f(t) = 4t^3 - t^2 + 4$ とすると $(t \neq 0)$

$$f'(t) = 12t^2 - 2t = 2t(6t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘	極小	↗

極小値 $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 4\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + 4 > 0$

$f(t) = 0$ の解の個数は 1 個であるから，求める実数 t の個数は　**1 個**

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より，$w^5=1$ であるから

$$(z^2)^5-1=(z^2-1)(z^2-w)(z^2-w^2)(z^2-w^3)(z^2-w^4)$$

したがって

$$\begin{aligned}
z^5-\frac{1}{z^5}&=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{w}{z}\right)\left(z-\frac{w^2}{z}\right)\left(z-\frac{w^3}{z}\right)\left(z-\frac{w^4}{z}\right)\\
&=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(w^2z-\frac{w^3}{z}\right)\left(w^4z-\frac{w}{z}\right)\left(wz-\frac{w^4}{z}\right)\left(w^3z-\frac{w^2}{z}\right)\\
&=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\\
&=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)
\end{aligned}$$

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると，$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より

$$\begin{aligned}
w^kz-\frac{1}{w^kz}&=w^kz-\overline{w^kz}\\
&=\left\{\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)\right\}\\
&\qquad-\left\{\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)-i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)\right\}\\
&=2i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)\qquad(k=0,1,2,3,4),\\
z^5-\frac{1}{z^5}&=z^5-\overline{z^5}\\
&=(\cos5\theta+i\sin5\theta)-(\cos5\theta-i\sin5\theta)\\
&=2i\sin5\theta
\end{aligned}$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}
2i\sin5\theta=2i\sin\theta\cdot2i\sin&\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\cdot2i\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\\
&\cdot2i\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\cdot2i\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

したがって

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=\frac{1}{16}\sin5\theta$$

よって　　$\boldsymbol{C=\dfrac{1}{16}}$

(3) (2) の結果に $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ を代入すると

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{9\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}\sin\frac{17\pi}{10} = \frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{2}$$

$\sin\dfrac{9\pi}{10} = \sin\dfrac{\pi}{10}$, $\sin\dfrac{13\pi}{10} = -\sin\dfrac{3\pi}{10}$, $\sin\dfrac{17\pi}{10} = -\sin\dfrac{3\pi}{10}$ であるから

$$\left(\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10} > 0$ より　　$\boldsymbol{\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{1}{4}}$

別解 $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ とすると　$5\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$\cos 3\theta = \sin 2\theta$ であるから　$\cos\theta(1 - 4\sin^2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos\theta \neq 0$ より　　$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta > 0$ に注意して解くと　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

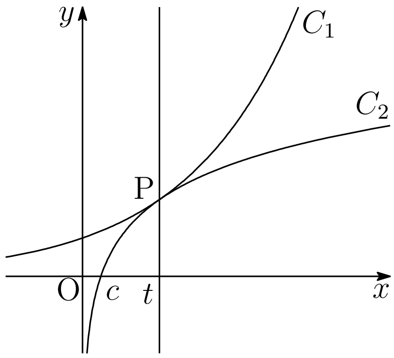
$\sin 3\theta = \sin\theta(3 - 4\sin^2\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10} &= \sin\theta\sin 3\theta \\ &= \sin^2\theta(3 - 4\sin^2\theta) \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{8}\left(3 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{16} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)=e^{ax}$，$g(x)=a\log x+b$ とおくと

$$f'(x)=ae^{ax},\quad g'(x)=\frac{a}{x}$$

$C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ の接点 P の x 座標が t であるから



$$f(t)=g(t),\quad f'(t)=g'(t)$$

したがって　$e^{at}=a\log t+b,\quad ae^{at}=\dfrac{a}{t}\quad\cdots(*)$

$(*)$ の第 2 式から $(a\neq 0)$

$$e^{at}=\frac{1}{t}\quad\text{ゆえに}\quad at=-\log t\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a=-\frac{\log t}{t}}$$

上の第 1 式と第 3 式を $(*)$ の第 1 式に代入すると

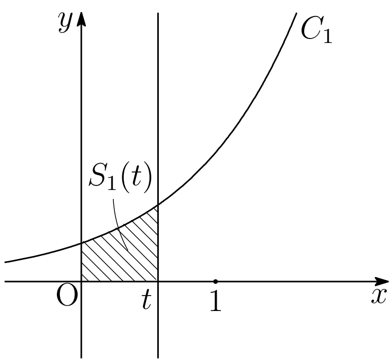
$$\frac{1}{t}=-\frac{\log t}{t}\log t+b\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{b=\frac{1+(\log t)^2}{t}}$$

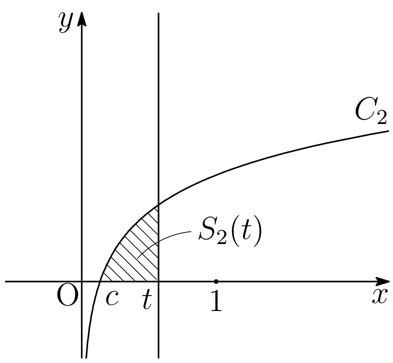
(2) $S_1(t)=\displaystyle\int_0^t e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\Big[\,e^{ax}\,\Big]_0^t=\frac{1}{a}(e^{at}-1)=-\frac{\log t}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)=\frac{t-1}{\log t}$

$h(t)=\log t$ とおくと　$h'(t)=\dfrac{1}{t}$

$$\lim_{t\to 1-0}\frac{\log t}{t-1}=\lim_{t\to 1-0}\frac{h(t)-h(1)}{t-1}=h'(1)=1$$

したがって　$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}S_1(t)=\lim_{t\to 1-0}\frac{t-1}{\log t}=\frac{1}{h'(1)}=\mathbf{1}$





(3) C_2 と x 軸との共有点の x 座標を c とすると　$g(c)=0$

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_c^t g(x)\,dx = \Big[\ xg(x)\ \Big]_c^t - \int_c^t xg'(x)\,dx \\ &= tg(t) - cg(c) - \int_c^t x\cdot\frac{a}{x}\,dx \\ &= tg(t) - at + ac \end{aligned}$$

このとき，(1) の結果から

$$g(t) = a\log t + b = -\frac{\log t}{t}\cdot\log t + \frac{1+(\log t)^2}{t} = \frac{1}{t}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2(t) &= t\cdot\frac{1}{t} - \left(-\frac{\log t}{t}\right)t - \frac{c\log t}{t} \\ &= 1 + \log t - \frac{c\log t}{t} \end{aligned}$$

また，$g(c)=0$ より

$$a\log c + b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log c = -\frac{b}{a} = \frac{1}{\log t} + \log t$$

$$\lim_{t\to 1-0}\log c = \lim_{t\to 1-0}\left(\frac{1}{\log t} + \log t\right) = -\infty \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t\to 1-0} c = 0$$

よって

$$\lim_{t\to 1-0} S_2(t) = \lim_{t\to 1-0}\left(1 + \log t - \frac{c\log t}{t}\right) = \mathbf{1}$$

補足 前頁の C_2 のグラフは $a>0$ のときで $y=f(x)$，$y=g(x)$ はともに単調増加である．このとき，$f(t)>0$ であるから，$g(c)=0$ を満たす c は

$$0 < c < t$$

である．このことを利用して $\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_2(t)$ を求めてもよい．

なお，$a<0$ のときは，$y=f(x)$，$y=g(x)$ はともに単調減少であり (x 軸に関して対称移動したグラフ)，このときも $0<c<t$ が成立する．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 多項式 $f_n(x),\ g_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を条件

$$f_1(x)=x,\quad g_1(x)=1,$$
$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x) \qquad (*)$$

により，$f_0(x)$，$g_0(x)$ を

$$f_1(x)=f_0(x)+xg_0(x),\quad g_1(x)=g_0(x)-xf_0(x)$$

を満たすように定めると　$f_0(x)=0,\ g_0(x)=1$

$(*)$ から　$xg_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x) \quad \cdots①$

$xg_{n+1}(x)=xg_n(x)-x^2f_n(x) \quad \cdots②$

① を ② に代入すると

$$f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)-x^2f_n(x)$$

整理すると　$f_{n+2}(x)-2f_{n+1}(x)+(1+x^2)f_n(x)=0$

$x\neq 0$ のとき，$\alpha=1+xi$，$\beta=1-xi$ とおくと

$$f_n(x)=\alpha^n\frac{f_1(x)-\beta f_0(x)}{\alpha-\beta}+\beta^n\frac{f_1(x)-\alpha f_0(x)}{\beta-\alpha}$$

$f_1(x)=x$，$f_0(x)=0$ より

$$f_n(x)=\frac{(1+xi)^n-(1-xi)^n}{2i}=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k+1}(xi)^{2k+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1}$$

$(*)$ から同様に　$g_{n+2}(x)-2g_{n+1}(x)+(1+x^2)g_n(x)=0$

$$g_n(x)=\alpha^n\frac{g_1(x)-\beta g_0(x)}{\alpha-\beta}+\beta^n\frac{g_1(x)-\alpha g_0(x)}{\beta-\alpha}$$

$g_1(x)=1$，$g_0(x)=1$，$1-\beta=xi$，$1-\alpha=-xi$ より

$$g_n(x)=\frac{(1+xi)^n+(1-xi)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k}(xi)^{2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}x^{2k}$$

$x=0$ のとき，$(*)$ より，$f_n(0)=0,\ g_n(0)=1$ であるから

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1},\quad g_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}x^{2k}\qquad(**)$$

これから

$$f_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1},\quad g_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k}x^{2k}$$

上の 2 式をそれぞれ微分すると

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(x)\}'&=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k+1}(2k+1)x^{2k}\\&=(n+1)\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}x^{2k}=(n+1)g_n(x),\\\{g_{n+1}(x)\}'&=\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k}2kx^{2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^{k+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{2k+2}(2k+2)x^{2k+1}\\&=-(n+1)\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^{k+1}{}_n\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1}=-(n+1)f_n(x)\end{aligned}$$

$(**)$ の第 1 式から，$f_n(x)$ の次数は　$2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1$
よって，$f_n(x)$ の次数は

$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき $\boldsymbol{n}$ 次式，$\boldsymbol{n}$ が偶数のとき $\boldsymbol{n-1}$ 次式

補足 $g_n(x)$ の次数は，$2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ であるから

n が奇数のとき $n-1$ 次式，n が偶数のとき n 次式

$f_n(x)$ は奇関数，$g_n(x)$ は偶関数である．

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) + f_{n+1}(x)i &= g_n(x) - xf_n(x) + i\{f_n(x) + xg_n(x)\} \\ &= (1+xi)\{g_n(x) + f_n(x)i\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} g_n(x) + f_n(x)i &= (1+xi)^{n-1}\{g_1(x) + f_1(x)i\} \\ &= (1+xi)^n \end{aligned}$$

これに $x = \tan\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} g_n(\tan\theta) + f_n(\tan\theta)i = (1+i\tan\theta)^n &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{\cos^n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cos^n\theta} \end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較して

$$\cos n\theta = g_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \sin n\theta = f_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

(3) (2) の結果から，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$-\dfrac{n\pi}{2} < n\theta < \dfrac{n\pi}{2}$ のとき

$$a = \frac{f_n(\tan\theta)}{g_n(\tan\theta)} = \tan n\theta$$

を満たす θ の個数を求めればよい．

(i) $a \neq 0$ のとき　n 個

(ii) $a = 0$ のとき，n が偶数のとき $n-1$ 個，n が奇数のとき n 個

よって　**$\boldsymbol{a = 0}$ かつ $\boldsymbol{n}$ が偶数のとき $\boldsymbol{n-1}$ 個，これ以外のとき $\boldsymbol{n}$ 個**