令和２年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育 (中学数学を除く)・国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部 (食糧自然経済) は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ (80 分) 数 I・II・A・B
- 教育学部 (中学数学) は $\boxed{4}$ ～ $\boxed{9}$ (150 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・園芸学部 (園芸，応用生命，緑地環境) $\boxed{4}$ ～ $\boxed{8}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$ ～ $\boxed{8}$, $\boxed{10}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る．B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る．

(1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ．

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ k を定数とし，$f(x) = x^3 - kx$ とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる．点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする．さらに，C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする．ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_0(2,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(-1,\ 1)$ がある．正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める．

> 四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ と四角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ のみを共有する．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) P_2，Q_2 の座標を求めよ．

(2) P_4，P_8 の座標を求めよ．

(3) 正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ t を実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ が成り立っている．三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている．その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す．n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする．n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ とする．S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ a は 0 でない定数とする．2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 複素数平面上で複素数 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする．正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする．点 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$ が表す複素数を z_n とする．

(1) 複素数 z_3 を求めよ．

(2) 複素数 z_6 を求めよ．

(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ．

9 正の整数 n に対して,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k^2$$

とする.

(1) a_n を求めよ.

(2) b_n を求めよ.

(3) c_n を求めよ.

(4) d_n を求めよ.

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ.

10 有理数 a, b に対して, $(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a, b は整数であることを証明せよ. ただし, i は虚数単位である.

11 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める.

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2 \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して, 不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 正の整数 n に対して, 不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) 実数 a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ を求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A さんが $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ の 4 枚を横一列に並べる数 X の場合の総数は

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \text{ (通り)}$$

X が 4 の倍数となるのは，下 2 桁が

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{1}\ \boxed{2} \\ \text{(ii)} & \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{4} \end{array}$$

となる場合である．

(i) のとき，残りの $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ を並べる $2!$ 通り．
(ii) のとき，残りの $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ を並べる $2!$ 通り．

よって，求める確率は $\dfrac{2!+2!}{12} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) B さんが $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ の 4 枚を横一列に並べる数 Y の場合の総数は

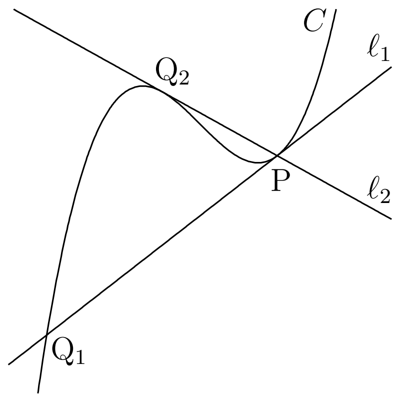
$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

$X < Y$ である場合について

- $X = \boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$, $\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}$, $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{4}$ のとき
  これら X の並べ方は，それぞれ 3, 2, 1 通り．
  Y の並べ方はすべての場合の 6 通り．ゆえに
  $$(3+2+1) \times 6 = 36 \text{ (通り)}$$
- $X = \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$ のとき
  Y は，$Y = \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$ を除く，$6-1=5$ (通り)
- $X = \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{}\ \boxed{}$ のとき
  X の並べ方は 2 通り．$Y = \boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$ である 3 通り．ゆえに
  $$2 \times 3 = 6 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{36+5+6}{12 \times 6} = \mathbf{\dfrac{47}{72}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)=x^3-kx$ より　$f'(x)=3x^2-k$
$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は



$$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$$

すなわち　$y=(3a^2-k)x-2a^3 \quad \cdots(*)$

これと曲線 $C: y=f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3-ka=(3a^2-k)x-2a^3$$

整理すると　$(x-a)^2(x+2a)=0$　これを解くと　$x=a,-2a$

したがって，点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線で P と異なる共有点の x 座標は

$$-2a$$

これから，$\mathrm{P}(a,\ f(a))$ と異なる点 $(b,\ f(b))$ における接線が P を通るとき

$$-2b=a \quad \text{ゆえに} \quad b=-\frac{a}{2}$$

$f'(a)=3a^2-k$，$f'\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{3}{4}a^2-k$ より，$f'(a)>f'\left(-\dfrac{a}{2}\right)$．$(*)$ から

$$\boldsymbol{\ell_1 : y=(3a^2-k)x-2a^3}$$

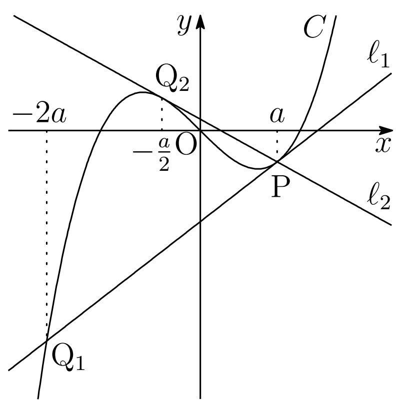
ℓ_2 の方程式は，ℓ_1 の方程式の a を $-\dfrac{a}{2}$ に置き換えたものであるから

$$\boldsymbol{\ell_2 : y=\left(\frac{3}{4}a^2-k\right)x+\frac{a^3}{4}}$$

$\mathrm{Q}_1\,(-2a,\ f(-2a))$，$\mathrm{Q}_2\left(-\dfrac{a}{2}, f\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}_1(-2a,-8a^3+2ka),\quad \mathrm{Q}_2\left(-\frac{a}{2},-\frac{a^3}{8}+\frac{k}{2}a\right)}$$

補足 $a>0$ のとき，右の図ようになる．
Q_2，P，Q_1 の x 座標は，それぞれ



$$-\frac{a}{2},\ a,-2a$$

であり，公比 -2 の等比数列をなす．さらに，Q_1 における接線の Q_1 と異なる共有点の x 座標は

$$4a$$

一般に，この規則は，変曲点を基準に成立する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 四角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n-1}$ を S_n とおくと $(n=1,2,3,\cdots)$.

$$S_1 : S_2 = \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0 : \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = 2 : \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad S_n : S_{n+1} = \sqrt{2} : 1$$

S_{n+1} は S_n を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して，辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ だけ共有している．

$\overrightarrow{p_n} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$，$\overrightarrow{q_n} = \overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ とおくと $(n=1,2,3,\cdots)$，$\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 = \sqrt{2}$ より

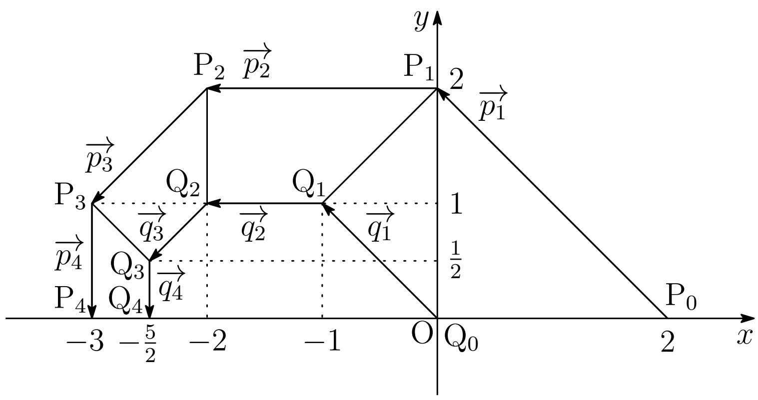
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_n} &= 2\overrightarrow{q_n},\\
\overrightarrow{q_n} &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^{n-1}}\left(\cos\frac{n+2}{4}\pi,\ \sin\frac{n+2}{4}\right)\\
&= 2^{1-\frac{n}{2}}\left(-\sin\frac{n}{4}\pi,\ \cos\frac{n}{4}\pi\right),\\
\overrightarrow{q_{n+4}} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{q_n}, \quad \overrightarrow{p_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{p_n}
\end{aligned}$$

とくに　$\overrightarrow{q_1} = (-1,\ 1)$, $\overrightarrow{q_2} = (-1,\ 0)$, $\overrightarrow{q_3} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{q_4} = \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2} = \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = (-2,\ 1)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = (2,\ 0) + 2(\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2})\\
&= (2,\ 0) + 2(-2,\ 1) = (-2,\ 2)
\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{P_2(-2,\ 2)}$，$\mathbf{Q_2(-2,\ 1)}$



(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\overrightarrow{q_k}=(-1,\ 1)+(-1,\ 0)+\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\left(0,-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ より

$$\sum_{k=1}^{4}\overrightarrow{p_k}=2\sum_{k=1}^{4}\overrightarrow{q_k}=(-5,\ 0),$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{p_k}&=\sum_{k=1}^{4}(\overrightarrow{p_k}+\overrightarrow{p_{k+4}})=\sum_{k=1}^{4}\left(\overrightarrow{p_k}-\frac{1}{4}\overrightarrow{p_k}\right)\\&=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{4}\overrightarrow{p_k}=\frac{3}{4}(-5,\ 0)=\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+\sum_{k=1}^{4}\overrightarrow{p_k}=(2,\ 0)+(-5,\ 0)=(-3,\ 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_8}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{p_k}=(2,\ 0)+\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)=\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$$

よって　　$\mathbf{P_4(-3,\ 0)},\quad \mathbf{P_8}\left(\mathbf{-\frac{7}{4},\ 0}\right)$

(3) $\displaystyle\overrightarrow{p_{k+8}}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{p_{k+4}}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{p_k}\right)=\frac{1}{16}\overrightarrow{p_k}$

$\displaystyle\overrightarrow{s_n}=\sum_{k=8n-7}^{8n}\overrightarrow{p_k}$ とおくと $(n=1,2,\cdots)$

$$\overrightarrow{s_1}=\left(-\frac{15}{4},\ 0\right),\quad \overrightarrow{s_{n+1}}=\frac{1}{16}\overrightarrow{s_n}$$

上の第 2 式より，$\displaystyle\overrightarrow{s_n}=\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\overrightarrow{s_1}$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8m}\overrightarrow{p_k}&=\sum_{n=1}^{m}\overrightarrow{s_n}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\overrightarrow{s_1}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^m}{1-\frac{1}{16}}\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)=\left(4^{1-2m}-4,\ 0\right)\end{aligned}$$

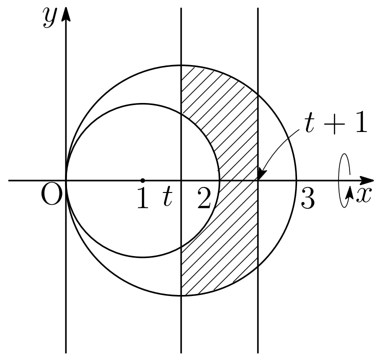
したがって　$\displaystyle\overrightarrow{\mathrm{OP}_{8m}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+\sum_{k=1}^{8m}\overrightarrow{p_k}$

$$=(2,\ 0)+(4^{1-2m}-4,\ 0)=(4^{1-2m}-2,\ 0)$$

よって　　$\mathbf{P_{8m}(4^{1-2m}-2,\ 0)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 不等式　(∗)　$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0,\quad t \leqq x \leqq t+1$

の表す領域について



$$x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-3x+y^2=0$$

をそれぞれ変形すると

$$(x-1)^2+y^2=1,\quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

したがって，不等式 (∗) は

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2 \geqq 0 \\ x^2-3x+y^2 \leqq 0 \\ t \leqq x \leqq t+1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 2x-x^2 \leqq y^2 \leqq 3x-x^2 \\ t \leqq x \leqq t+1 \end{cases}$$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき，不等式の表す領域は右の図の斜線部分で境界線を含む．

したがって，$V(t)$ は

$$\begin{aligned}\frac{V(t)}{\pi} &= \int_t^{t+1}(3x-x^2)\,dx - \int_t^2(2x-x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_t^{t+1} - \left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_t^2 \\ &= -\frac{1}{3}t^3+2t-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

ゆえに　$V(t)=\pi\left(-\frac{1}{3}t^3+2t-\frac{1}{6}\right),\quad V'(t)=\pi(-t^2+2)$

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↗	極大	↘	

よって　最大値　$\boldsymbol{V(\sqrt{2})=\dfrac{8\sqrt{2}-1}{6}\pi}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\angle\mathrm{ADB} = 90^\circ$ より　$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$

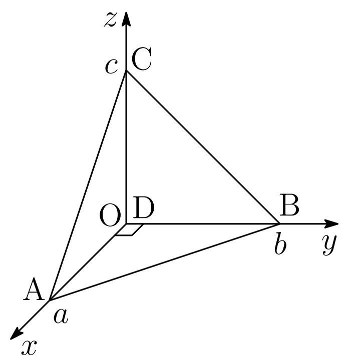
これを条件式 $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$ に代入すると

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$$

整理すると　$\mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BC}^2$，$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{AC}^2$

したがって　$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BDC} = 90^\circ$　よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BDC} = 90^\circ}$

(2) (1) の結果から



$$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{CDA} = 90^\circ$$

空間の点として，D を原点 O とし，A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ とすると

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2,\quad \mathrm{DC}^2 = \mathrm{OC}^2 = c^2,$$
$$\sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{DC}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G は　$\mathrm{G}\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{3},\ \dfrac{c}{3}\right)$

$$\mathrm{DG} = \mathrm{OG} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

よって　$\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \mathbf{3}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) k 回目までに S_k が 3 の倍数でなく，$S_k \equiv 1,\ S_k \equiv 2 \pmod 3$ となる確率をそれぞれ x_k，y_k とすると

$$x_1 = \frac{2}{5},\quad y_1 = \frac{2}{5},\quad x_2 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}y_1 = \frac{6}{25},\quad y_2 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 = \frac{6}{25}$$

よって　$p_2 = \dfrac{2}{5}x_1 + \dfrac{2}{5}y_1 = \mathbf{\dfrac{8}{25}},\quad p_3 = \dfrac{2}{5}x_2 + \dfrac{2}{5}y_2 = \mathbf{\dfrac{24}{125}}$

(2) k 回目までに S_k が 3 の倍数でなく，$S_k \equiv 1$, $S_k \equiv 2 \pmod 3$ となる確率をそれぞれ x_k，y_k とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$x_{k+1} = \frac{1}{5}x_k + \frac{2}{5}y_k, \quad y_{k+1} = \frac{2}{5}x_k + \frac{1}{5}y_k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

上の 2 式から

$$(*) \quad x_{k+1} + y_{k+1} = \frac{3}{5}(x_k + y_k), \quad x_{k+1} - y_{k+1} = -\frac{1}{5}(x_k - y_k)$$

$x_1 = \dfrac{2}{5}$，$y_1 = \dfrac{2}{5}$ であるから

$$\begin{aligned} x_k + y_k &= (x_1 + y_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\ x_k - y_k &= (x_1 - y_1)\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1} = 0 \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき，求める確率は

$$p_n = \frac{2}{5}x_{n-1} + \frac{2}{5}y_{n-1} = \frac{2}{5}(x_{n-1} + y_{n-1}) = \boldsymbol{\frac{8}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}}$$

(3) S_1, S_2, S_3 が 3 の倍数でなく，$a_3 = 5$ のとき，$S_3 \equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$x_3 = \frac{1}{5}y_2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{25} = \frac{6}{125}, \quad y_3 = 0$$

これらの初期値について，$(*)$ を解くと $(k \geqq 3)$

$$x_k + y_k = x_3\left(\frac{3}{5}\right)^{k-3}, \quad x_k - y_k = x_3\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-3}$$

$a_3 = 5$ となる事象を A，n 回目までに S_n が 3 の倍数でなく，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる事象を B とすると $(n \geqq 4)$

$$\begin{aligned} P(A) &= x_3, \\ P(A \cap B) &= \frac{2}{5}x_{n-1} + \frac{2}{5}y_{n-1} \\ &= \frac{2}{5}(x_{n-1} + y_{n-1}) = \frac{2}{5}x_3\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \end{aligned}$$

求める条件付き確率は　$q_n = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-4}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 2つの放物線 $y=x^2$，$x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の軸はそれぞれ，y 軸，x 軸であるから，両方に接する直線は，x 軸および y 軸に平行ではない．

$y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

曲線 $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は $(t\neq 0)$

$$y-t^2=2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad x=\frac{1}{2t}y+\frac{t}{2}$$

これと $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ から x を消去すると

$$\frac{1}{2t}y+\frac{t}{2}=\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}\quad \text{整理すると}\quad ty^2-ay+\frac{3a^2t}{2}-at^2=0$$

y に関する2次方程式は重解を持つから，係数について

$$(-a)^2-4t\left(\frac{3a^2t}{2}-at^2\right)=0\quad \text{ゆえに}\quad a(4t^3-6at^2+a)=0$$

$a\neq 0$ であるから，3次方程式 $4t^3-6at^2+a=0$ が異なる3つの実数解をもつ a の値の範囲を求める．$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とすると

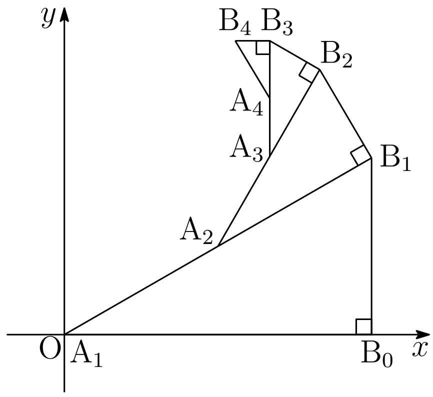
$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

3次方程式 $f(t)=0$ が異なる3つの実数解をもつとき，$f(0)f(a)<0$ より

$$a(-2a^3+a)<0\quad \text{ゆえに}\quad a^2(2a^2-1)>0$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}<a}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $w=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とすると



$$\begin{aligned}
z_2-z_1&=w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\\
z_3-z_2&=\frac{w}{\sqrt{3}}(z_2-z_1)=\frac{w}{\sqrt{3}}w=\frac{w^2}{\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

$z_1=0$ であるから，上の2式より

$$z_3=(z_2-z_1)+(z_3-z_2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i\right)=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}+i}$$

(2) $z_{n+2}-z_{n+1}=\dfrac{w}{\sqrt{3}}(z_{n+1}-z_n)$ であるから (n は自然数)

$n \geqq 2$ のとき $$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{z_{k+2}-z_{k+1}}{z_{k+1}-z_k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{w}{\sqrt{3}}$$

すなわち $$z_{n+1}-z_n=w\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=w\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$$

$$z_n=\frac{w}{1-\frac{w}{\sqrt{3}}}\left\{1-\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ は，$n=1$ のときも成立する．ここで，$w+\overline{w}=\sqrt{3}$，$w\overline{w}=1$ より

$$w^2-\sqrt{3}w+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{1-\frac{w}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}w$$

上の第 2 式より $$z_n=\sqrt{3}w^2-3w\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^n \quad \cdots(**)$$

$n=6$ を $(**)$ に代入すると，$w=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ より

$$\sqrt{3}w^2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,$$

$$3w=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),$$

$$\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^6=\frac{\cos\pi+i\sin\pi}{27}=-\frac{1}{27}$$

よって $$z_6=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{-1}{27}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{9}\sqrt{3}+\frac{14}{9}i}$$

(3) $(**)$ に $n=6m$ を代入すると，(2) の結果により

$$z_{6m}=\sqrt{3}w^2-3w\left\{\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^6\right\}^m=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{-1}{27}\right)^m$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-3\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}+\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}i$$

よって $$\mathrm{Re}(z_{6m})=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-3\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}},\quad \mathrm{Im}(z_{6m})=\boldsymbol{\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x) = (x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ とおくと

$$f(1) = 2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = 2^n}$$

(2) $f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, kx^{k-1}$ より

$$f'(1) = n{\cdot}2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n = n{\cdot}2^{n-1}}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \left[\, \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \,\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \left[\, \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} x^{k+1} \,\right]_0^1$ より

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

(4) $f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k(k-1)x^{k-2}$ より

$$f''(1) = n(n-1){\cdot}2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k(k-1)$$

上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k^2 = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k \\ &= n(n-1){\cdot}2^{n-2} + n{\cdot}2^{n-1} = \boldsymbol{n(n+1){\cdot}2^{n-2}} \end{aligned}$$

(5) (1)〜(4) の結果から

$$\frac{a_n b_n}{c_n d_n} = 2^n \times n{\cdot}2^{n-1} \times \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \times \frac{1}{n(n+1){\cdot}2^{n-2}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-2^{-n-1}} = \mathbf{1}$

10 $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ より (a, b は有理数)，a^2-b^2 と $2ab$ が整数ならば，a, b は整数であることを証明すればよい．$a \neq 0$ のとき $a=\dfrac{p}{q}$ (整数 p, $q>0$ は互いに素)，$b \neq 0$ のとき $b=\dfrac{r}{s}$ (整数 r, $s>0$ は互いに素) とする．

(i) $a=0$ のとき，$-b^2=-\dfrac{r^2}{s^2}$ が整数であるとき，$s^2=1$ より　$b=\pm r$
ゆえに，a, b はともに整数である．

(ii) $b=0$ のとき，$a^2=\dfrac{p^2}{q^2}$ が整数であるとき，$q^2=1$ より　$a=\pm p$
ゆえに，a, b はともに整数である．

(iii) $ab \neq 0$ のとき，$a^2-b^2=M$，$2ab=N$ とおくと (M, N は整数)

$$\frac{p^2}{q^2}-\frac{r^2}{s^2}=M \quad \cdots(*), \quad \frac{2pr}{qs}=N \quad \cdots(**)$$

$(*)$ より　$\dfrac{p^2s^2}{q^2}=r^2+s^2M \quad \cdots$①，　$\dfrac{q^2r^2}{s^2}=p^2-q^2M \quad \cdots$②

① の右辺は整数で，p, q が互いに素であるから，s^2 は q^2 で割り切れる．

② の右辺は整数で，r, s が互いに素であるから，q^2 は s^2 で割り切れる．
したがって　$q^2=s^2$　すなわち　$q=s$　これを $(**)$ に代入して

$$\frac{2pr}{q^2}=N$$

上式の右辺は整数で，p, q および r, $s(=q)$ は互いに素であるから

$$q^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad q=s=1 \quad \text{すなわち} \quad a=p,\ b=r$$

よって，a, b は整数である．

(i)〜(iii) より，題意は成立する．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

は，正の整数 n に対して

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad (*)$$

であることを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n = 1$ のとき，$f_1(x) = 0$ であるから，$(*)$ は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$0 \leqq f_k(x) \leqq 1 \quad ゆえに \quad 0 \leqq (f_k(x) - 1)^2 \leqq 1$$

$0 \leqq x \leqq 1$ において　$0 \leqq \displaystyle\int_0^x (f_k(t) - 1)^2\,dt \leqq \int_0^x dt$

したがって　$0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq x$　ゆえに　$0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq 1$

よって，$n = k + 1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(2) 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数

$$g_n(x) = (-1)^n \left(f_n(x) - f(x)\right)$$

を定義すると，$g_n(x)$ は正の整数 n に対して

$$g_n(x) \geqq 0 \tag{$**$}$$

であることを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n = 1$ のとき，$f_1(x) = 0$，$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ より

$$g_1(x) = -1\left(0 - \frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1} \geqq 0$$

［2］ $n = k$ のとき，$g_k(x) \geqq 0$ であると仮定すると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}
g'_{k+1}(x) &= (-1)^{k+1}\left(f'_{k+1}(x) - f'(x)\right) \\
&= (-1)^{k+1}\left\{(f_k(x) - 1)^2 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} \\
&= (-1)^{k+1}\left(f_k(x) - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\left(f_k(x) - 1 - \frac{1}{x+1}\right) \\
&= (-1)^k\left(f_k(x) - f(x)\right)\left(1 - f_k(x) + \frac{1}{x+1}\right) \\
&= g_k(x)\left(1 - f_k(x) + \frac{1}{x+1}\right) \geqq 0
\end{aligned} \tag{$***$}$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．

したがって，正の整数 n に対して

$$(-1)^n\left(f_n(x) - f(x)\right) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad (-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x)$$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$g_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ および $(***)$ より

$$0 \leqq g_1(x) \leqq x, \quad 0 \leqq g'_{k+1}(x) \leqq 2g_k(x)$$

自然数 n について

$$0 \leqq g_n(x) \leqq \frac{2^{n-1}}{n!}x^n \qquad \text{(A)}$$

が成立することを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n=1$ のとき，$0 \leqq g_1(x) \leqq x$ より，(A) は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$0 \leqq g'_{k+1}(x) \leqq 2g_k(x) \leqq \frac{2^n}{n!}x^n$$

$f_n(0)=0$，$f(0)=0$ であるから　$g_n(0)=0$　(n は自然数)

$$0 \leqq \int_0^x g'_{k+1}(t)\,d \leqq \int_0^x \frac{2^k}{k!}t^k\,dt$$

ゆえに
$$0 \leqq g_{k+1}(x) \leqq \frac{2^k}{(k+1)!}x^{k+1}$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(A) より，$n \geqq 3$ のとき

$$g_n(a) = \frac{2^{n-1}}{n!}a^n = \frac{a}{1}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdots\frac{2a}{n} \leqq a^2\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-2}$$

$0 \leqq a \leqq 1$ より，$0 \leqq \dfrac{2a}{3} \leqq \dfrac{2}{3}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} g_n(a) = 0$$

$g_n(a) = (-1)^n(f_n(a) - f(a))$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(a) - f(a)\} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) = \boldsymbol{\frac{a}{a+1}}$$