平成 31 年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ (90 分) 数 I・A
- 国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学プログラム (植物生命科学・人間科学) は $\boxed{3}$ ～ $\boxed{6}$ (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学)・先進科学プログラム (化学・生物学) は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ (150 分) 数 I・II・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・園芸 (園芸，応用生命，緑地環境)・先進科学プログラム (物理・工学) $\boxed{7}$ ～ $\boxed{11}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{11}$ ～ $\boxed{13}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{10}$ ～ $\boxed{13}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = 5, \quad \mathrm{BC} = 4, \quad \mathrm{CD} = 4, \quad \mathrm{DA} = 2$$

とする．また，対角線 AC と BD の交点を P とおく．

(1) 三角形 APB の外接円の半径を R_1，三角形 APD の外接円の半径を R_2 とするとき，$\dfrac{R_1}{R_2}$ の値を求めよ．

(2) AC の長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数のグラフに関する以下の問いに答えよ．ただし，m は実数とする．

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときのグラフの概形をかけ．

(2) グラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする．

(1) d_5 を求めよ．

(2) d_{15} を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ コインが5枚ある．サイコロを振って出た目によって，これらのコインを1枚ずつ3つの箱A，B，Cのいずれかに入れていく．出た目が1であればコインを1枚，箱Aに入れる．出た目が2か3であればコインを1枚，箱Bに入れる．出た目が4か5か6であればコインを1枚，箱Cに入れる．さいころを5回振ったとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ．

(2) A，Bいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 三角形ABCにおいて $\angle \mathrm{A} = 45^\circ$，$\angle \mathrm{B} = 60^\circ$ である．頂点Aから辺BCに引いた垂線とBCが交わる点をDとし，頂点Cから辺ABに引いた垂線とABが交わる点をEとする．また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 直線CEと直線ADの交点をHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a は0でない実数とし，$f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ C と導関数 $y = f'(x)$ のグラフ C' が相異なる3点で交わるような a の範囲を求めよ．

(2) a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた2つの図形の面積の和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $a_1 = 3$，$a_2 = 2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1} = {a_n}^2 + a_n - 1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める．

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つような自然数 n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 三角形ABCは $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 2\mathrm{BC}$ を満たしている．また，角Aの二等分線と辺BCの交点をDとするとき，$\mathrm{AD} = 15$ である．さらに，三角形ABCの内接円の半径は4である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\theta = \angle \mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ．また，$A = \angle \mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

(2) 辺BCの長さを求めよ．

9 コインが 5 枚ある．サイコロを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A，B，C のいずれかに入れていく．出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる．出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる．出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる．さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ．

(2) A，B，C のいずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ．

(3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた．このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ．

10 座標平面上の円 C は，点 $(0,\ 0)$ を通り，中心が直線 $x+y=0$ 上にあり，さらに双曲線 $xy=1$ と接する．このとき，円 C の方程式を求めよ．ただし，円と双曲線がある点で接するとは，その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう．

11 n を正の整数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n\theta\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2}\theta\,d\theta$ を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7\theta\,d\theta$ を求めよ．

12 数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする．$k=1,2,\cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1，2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3，4 が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5，6 が出たら移動しないとする．n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする．

(1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ．

(3) ℓ は n 未満の正の整数とする．このとき，$\dfrac{1}{2^\ell} < X_n$ となる確率を求めよ．

13 a は実数とする．座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく．いま，x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする．

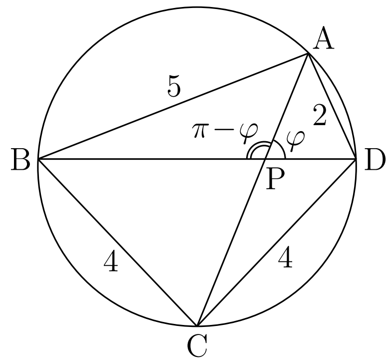
(1) n を正の整数とする．このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ．

(2) 任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\angle \mathrm{APD} = \varphi$ とすると　$\angle \mathrm{APB} = \pi - \varphi$

$\triangle \mathrm{APB}$，$\triangle \mathrm{APD}$ に正弦定理を適用すると



$$\frac{5}{\sin(\pi - \varphi)} = 2R_1, \quad \frac{2}{\sin\varphi} = 2R_2$$

$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ より

$$2R_1 : 2R_2 = 5 : 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{2}}$$

(2) $\angle \mathrm{ABC} = \theta$ とすると　$\angle \mathrm{ADC} = \pi - \theta$

$\triangle \mathrm{ABC}$，$\triangle \mathrm{ADC}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos\theta \\ &= 41 - 40\cos\theta \quad \cdots① \\ \mathrm{AC}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos(\pi - \theta) \\ &= 20 + 16\cos\theta \quad \cdots② \end{aligned}$$

① $\times 2 +$ ② $\times 5$ より

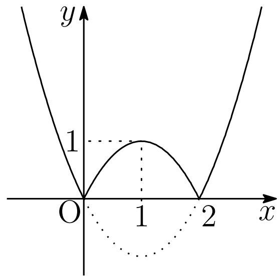
$$7\mathrm{AC}^2 = 182 \quad \text{よって} \quad \mathbf{AC} = \boldsymbol{\sqrt{26}}$$

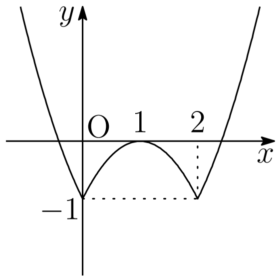
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=|x^2-2mx|-m$ に $m=1$ を代入すると　$y=|x^2-2x|-1$

$y=|x^2-2x|$(左図) を y 軸方向に -1 だけ平行移動したものが

$$y=|x^2-2x|-1$$

である (右図).





(2) $y=|x^2-2mx|-m$ と x 軸との共有点の x 座標について

$$|x^2-2mx|-m=0 \quad \text{ゆえに} \quad |x^2-2mx|=m \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の解は，放物線 $y=|x^2-2mx|$ と直線 $y=m$ の共有点の x 座標であり，これらの共有点の個数は次のとおりである．

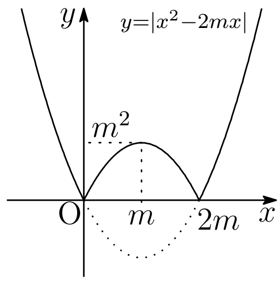
(i) $m<0$ のとき，共有点はない

(ii) $m=0$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $m^2<m$，すなわち，$0<m<1$ のとき，共有点は 2 個

(iv) $0<m^2=m$，すなわち，$m=1$ のとき，共有点は 3 個

(v) $0<m<m^2$，すなわち，$1<m$ のとき，共有点は 4 個



(i)〜(v) から
$$\begin{cases} \boldsymbol{m<0} \text{ のとき} & \mathbf{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{m=0} \text{ のとき} & \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{0<m<1} \text{ のとき} & \mathbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{m=1} \text{ のとき} & \mathbf{3} \text{ 個} \\ \boldsymbol{1<m} \text{ のとき} & \mathbf{4} \text{ 個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 約数の個数が5個である自然数は，p^4 (p は素数) で表される．

$$5^4 = 625, \quad 7^4 = 2401$$

よって　　$\boldsymbol{d_5 = 2401}$

(2) 約数の個数が15個である自然数は

(i) p^{14} (p は素数)　または　(ii) p^2q^4 ($p,\ q$ は相異なる素数)

で表される．

(i) $d_{15} = p^{14}$ (p は素数) のとき

$$p^{14} \geqq 2^{14} = 2^{10} \times 2^4 > 1000 \times 16 = 16000$$

(ii) $d_{15} = p^2q^4$ ($p,\ q$ は相異なる素数) のとき

$43^2 = 1849$，$44^2 = 1936$ であるから

$$p^2q^4 = 44^2 \quad \text{ゆえに} \quad pq^2 = 11 \times 2^2$$

よって　$p = 11$，$q = 2$　すなわち　$d_{15} = p^2q^4 = 11^2 \times 2^4 = 1936$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{d_{15} = 1936}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) さいころを1回振るとき，コインが箱A，B，Cに入る確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6},\quad \frac{2}{6},\quad \frac{3}{6}$$

コインが箱A，B，Cにそれぞれ2枚，2枚，1枚入る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{3}{6} = 30 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

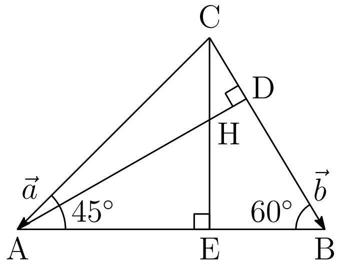
(2) A，Bに1枚以上コインが入る事象をそれぞれ $A,\ B$ とすると

$$\begin{aligned}P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 + \left(1 - \frac{2}{6}\right)^5 - \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)^5 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{4}{6}\right)^5 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \frac{3125 + 1024 - 243}{6^5} = \frac{3906}{6^5} = \frac{217}{432}\end{aligned}$$

よって，求める確率は　$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - \dfrac{217}{432} = \boldsymbol{\dfrac{215}{432}}$

$\boxed{5}$ (1) $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\sqrt{3}:1$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3}+1}}$$



(2) $\mathrm{CE}=\mathrm{AE}$，$\mathrm{HE}=\mathrm{AE}\tan 30^\circ$ より

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{CE}-\mathrm{HE}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{AE}-\mathrm{AE}\tan 30^\circ}{\mathrm{AE}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CE}}\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3}+1}=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b})}$

$\boxed{6}$ (1) $f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ より $f'(x)=3ax^2+6ax+3$

$g(x)=f(x)-f'(x)$ とすると $g(x)=ax^3-3(2a-1)x \quad \cdots(*)$

3次方程式 $g(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつ a の範囲を求めればよい．

$$g'(x)=3\{ax^2-(2a-1)\}$$

$g'(x)=0$，すなわち，$x^2=\dfrac{2a-1}{a}$ が異なる2つの実数解をもつから

$$\frac{2a-1}{a}>0 \quad \text{ゆえに} \quad a(2a-1)>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a<0,\ \frac{1}{2}<a}$$

(2) (1) の結果から，$k^2=\dfrac{3(2a-1)}{a}$ とおくと $(k>0)$

$$g(x)=ax^3-ak^2x=ax(x^2-k^2)$$

求める面積を S とすると，S は $y=g(x)$ と x 軸で囲まれ部分の面積であるから，$y=g(x)$ が原点に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^k |g(x)|\,dx=|a|\int_0^k(-x^3+k^2x)\,dx\\&=|a|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{k^2x^2}{2}\right]_0^k=\frac{|a|}{4}k^4=\frac{|a|}{4}\cdot\frac{9(2a-1)^2}{a^2}=\frac{9(2a-1)^2}{4|a|}\end{aligned}$$

よって $S=\boldsymbol{\dfrac{9(2a-1)^2}{2|a|}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $a_1=3$，$a_2=2$

$$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1 \quad (n \geqq 2) \quad \cdots(*)$$

について，次式が成立することを数学的帰納法により証明する[1].

$$\text{(A)} \quad a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1 \quad (n \geqq 2)$$

［1］$n=2$ のとき

(∗) により　$a_3={a_2}^2+a_2-1=2^2+2-1=5$

(A) より　$a_3=a_1a_2-1=3\cdot 2-1=5$

よって，$n=2$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$a_{k+1}=a_1a_2\cdots a_k-1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1}+1=a_1a_2\cdots a_k \quad \cdots①$$

(∗) により

$$a_{k+2}={a_{k+1}}^2+a_{k+1}-1=(a_{k+1}+1)a_{k+1}-1 \quad \cdots②$$

① を ② に代入すると

$$a_{k+2}=(a_1a_2\cdots a_k)a_{k+1}-1=a_1a_2\cdots a_{k+1}-1$$

したがって，$n=k+1$ のときも，(A) が成立する．

よって，$n \geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成立する．

(2) (∗) より，${a_n}^2=a_{n+1}-a_n+1$ であるから $(n \geqq 2)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2&={a_1}^2+\sum_{i=2}^{n}{a_i}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)\\&=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)=a_{n+1}+n+6\end{aligned}$$

(A) より，$a_1a_2\cdots a_n=a_{n+1}+1$ であるから

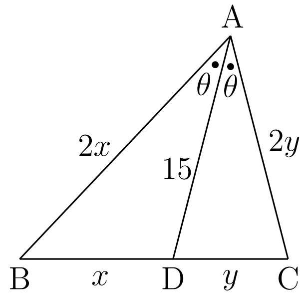
$$a_1a_2\cdots a_n+100=a_{n+1}+101$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つとき，上の 2 式から

$$a_{n+1}+n+6=a_{n+1}+101 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n=95}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{11}$ を参照

8 (1) $\mathrm{AB}=2x$，$\mathrm{AC}=2y$ とおく．



$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ より　$\mathrm{BC}=x+y$

AD は角 A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2x:2y$$

ゆえに　　$\mathrm{BD}=x,\quad \mathrm{DC}=y$

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\cdot 4$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 15\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 15\sin\theta=\frac{1}{2}\{2x+(x+y)+2y\}\cdot 4$$

したがって　$15(x+y)\sin\theta=6(x+y)$　ゆえに　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$

$A=2\theta$ であるから $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin A=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{21}}{25}}$$

$$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\boldsymbol{\frac{17}{25}}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用すると　$x^2=(2x)^2+15^2-2\cdot 2x\cdot 15\cos\theta$

$$x^2-4\sqrt{21}x+75=0\quad\cdots①$$

同様に，$\triangle\mathrm{ACD}$ に余弦定理を適用すると

$$y^2-4\sqrt{21}y+75=0\quad\cdots②$$

$x=y$ のとき，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$，すなわち，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形となり，(1) の結果に反する．したがって，x, y は 2 次方程式

$$t^2-4\sqrt{21}t+75=0$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$x+y=4\sqrt{21}\quad よって\quad \mathbf{BC=4\sqrt{21}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) さいころを1回振るとき，コインが箱A，B，Cに入る確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6},\quad \frac{2}{6},\quad \frac{3}{6}$$

コインが箱A，B，Cにそれぞれ2枚，2枚，1枚入る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{3}{6} = 30\times\frac{1}{36}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{108}}$$

(2) A，B，Cに1枚以上コインが入る事象をそれぞれA, B, Cとすると

$$\begin{aligned}
P(\overline{A\cap B\cap C}) &= P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\\
&= P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})\\
&\qquad -P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{B}\cap\overline{C})-P(\overline{C}\cap\overline{A})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\
&= \left(1-\frac{1}{6}\right)^5+\left(1-\frac{2}{6}\right)^5+\left(1-\frac{3}{6}\right)^5\\
&\qquad -\left(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\right)^5-\left(1-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}\right)^5-\left(1-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}\right)^5+0\\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5+\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{1}{6}\right)^5-\left(\frac{2}{6}\right)^5\\
&= \frac{5^5+4^5-1^5-2^5}{6^5} = \frac{3125+1024-1-32}{6^5} = \frac{4116}{6^5} = \frac{343}{648}
\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$P(A\cap B\cap C) = 1-P(\overline{A\cap B\cap C}) = 1-\frac{343}{648} = \mathbf{\frac{305}{648}}$$

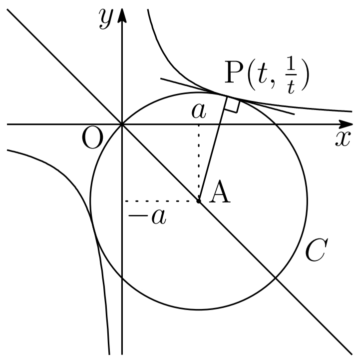
(3) Aにちょうど2枚のコインが入っている確率は

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{3\cdot 6^4}$$

(1)の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{5}{3\cdot 6^2}\Big/\frac{5^4}{3\cdot 6^4} = \frac{6^2}{5^3} = \mathbf{\frac{36}{125}}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 円 C の中心を A とすると，A は直線 $x+y=0$ 上にあるから，$\mathrm{A}(a, -a)$ とおく．また，円と双曲線 $xy=1$ の接点を $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

双曲線 $y=f(x)$ 上の点 P における接線の傾きは

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

この接線と直線 AP は垂直であるから　$-\dfrac{1}{t^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{t}+a}{t-a} = -1$

整理すると　$(t^2+1)(at-t^2+1)=0$　ゆえに　$a = t-\dfrac{1}{t}$　$\cdots(*)$

$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OA}^2$ であるから　$(t-a)^2 + \left(\dfrac{1}{t}+a\right)^2 = 2a^2$

整理すると　$t^2 + \dfrac{1}{t^2} - 2a\left(t-\dfrac{1}{t}\right) = 0$

ゆえに　$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2 + 2 - 2a\left(t-\dfrac{1}{t}\right) = 0$

$(*)$ より　$a^2+2-2a\cdot a = 0$　ゆえに　$a=\pm\sqrt{2}$

C は中心 $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$，半径 2 の円であるから (複号同順)

$$\boldsymbol{(x\mp\sqrt{2})^2 + (y\pm\sqrt{2})^2 = 4} \quad \textbf{(複号同順)}$$

11 (1) $\tan^n\theta+\tan^{n+2}\theta=\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)=\tan^n\theta\cos^2\theta=\tan^n\theta(\tan\theta)'$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta(\tan\theta)'\,d\theta$$
$$=\frac{1}{n+1}\Big[\,(\tan^{n+1}\theta)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{n+1}}$$

(2) (1) の結果に $n=5,\ 3,\ 1$ をそれぞれ代入すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^5\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta\,d\theta=\frac{(\sqrt{3})^6}{6}=\frac{9}{2}\qquad\cdots①$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^3\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^5\theta\,d\theta=\frac{(\sqrt{3})^4}{4}=\frac{9}{4}\qquad\cdots②$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^3\theta\,d\theta=\frac{(\sqrt{3})^2}{2}=\frac{3}{2}\qquad\cdots③$$

① − ② + ③ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta\,d\theta=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

また $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\,d\theta=\Big[-\log\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\log 2$ これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta\,d\theta=\boldsymbol{\frac{15}{4}-\log 2}$$

12 (1) k 回目にさいころを振ったときに，動点 P は $\dfrac{a_k}{2^k}$ だけ移動するから

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k},\quad a_k\in\{-1,\ 0,\ 1\}$$

$a_k\neq 0$ でない最小の k を i とする．

$a_i=1$ のとき　$X_n>\dfrac{1}{2^i}-\left(\dfrac{1}{2^{i+1}}+\dfrac{1}{2^{i+2}}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2^n}>0$

$a_i=-1$ のとき　$X_n<-\dfrac{1}{2^i}+\left(\dfrac{1}{2^{i+1}}+\dfrac{1}{2^{i+2}}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=-\dfrac{1}{2^n}<0$

求める確率は，最初に $i-1$ 回連続して 5，6 が出て，i 回目に初めて 1，2 が出る確率であるから $(i=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

補足 初項 a，末項 l，公比 r の等比数列の和 S は $\boldsymbol{S = \dfrac{a - rl}{1 - r}}$

(証明) 項数を n とすると，$l = ar^{n-1}$ より

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - r \cdot ar^{n-1}}{1 - r} = \frac{a - rl}{1 - r}$$

本題では $\quad \dfrac{1}{2^{i+1}} + \dfrac{1}{2^{i+2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^i} - \dfrac{1}{2^n}$

別解 $X_n = 0$ となる確率は，n 回連続して，5，6 の目が出る確率である．また，$X_n < 0$ となる確率と $0 < X_n$ となる確率は，対称性により等しい．

$$P(X_n < 0) + P(X_n = 0) + P(0 < X_n) = 1$$

ゆえに $\qquad 2P(0 < X_n) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$

よって $\qquad P(0 < X_n) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$

(2) (1) で求めた確率を

$$p_n = P(0 < X_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

とおくと，1 回目に 1，2 の目が出て，点 P が $\dfrac{1}{2}$ に移動し，その後の $n-1$ 回の移動の和が正である確率であるから

$$\frac{1}{3} \times p_{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}$$

(3) (1) で示した等式から

$$\frac{1}{2^i}-\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\cdots+\frac{1}{2^\ell}\right)=\frac{1}{2^\ell}$$

に着目する．$a_j=0\ (1\leqq j<i)$，$a_i=1$ となる i について，次の (i)〜(iii) の場合の確率を求める．

(i) $i<\ell$ のとき
i 回目に初めて 1，2 が出て $i+1$ 回目から ℓ 回目まで連続 $\ell-i$ 回 3，4 が出た時点で，P の座標は $\dfrac{1}{2^\ell}$ となり，その後の $n-\ell$ 回の移動の和が正，または，$i+1$ 回目から ℓ 回目まで連続 $\ell-i$ 回 3，4 が出なければよいから

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\ell-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-i}p_{n-\ell}+1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-i}\right\}\\
=&\sum_{i=1}^{\ell-1}\left\{\frac{1}{3^\ell}(p_{n-\ell}-1)+\frac{1}{3^i}\right\}=\sum_{i=1}^{\ell-1}\left\{-\frac{1}{2\cdot3^\ell}-\frac{1}{2\cdot3^n}+\frac{1}{3^i}\right\}\\
=&\frac{1}{2}\left(-\frac{\ell-1}{3^\ell}-\frac{\ell-1}{3^n}+1-\frac{1}{3^{\ell-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ell+2}{3^\ell}-\frac{\ell-1}{3^n}+1\right)
\end{aligned}$$

(ii) $i=\ell$ のとき，残りの $n-\ell$ 回の移動の和が正であるから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\frac{1}{3}p_{n-\ell}=\frac{1}{3^\ell}\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-\ell}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^\ell}-\frac{1}{3^n}\right)$$

(iii) $\ell<i$ のとき，$\dfrac{1}{2^{i-1}}\leqq\dfrac{1}{2^\ell}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
X_n=\sum_{k=i}^{n}\frac{a_k}{2^k}&\leqq\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}+\cdots\frac{1}{2^n}\\
&=\frac{\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{2^n}\leqq\frac{1}{2^\ell}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^\ell}
\end{aligned}$$

よって，このときの確率は　0

(i)〜(iii) より，求める確率は

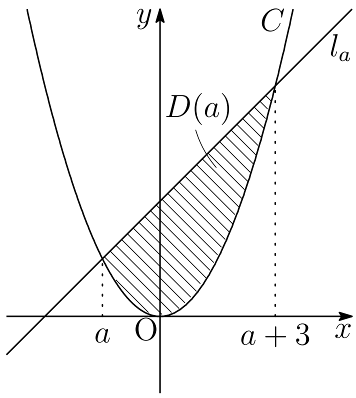
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\ell+2}{3^\ell}-\frac{\ell-1}{3^n}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^\ell}-\frac{1}{3^n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ell+1}{3^\ell}-\frac{\ell}{3^n}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ (1) $f(x)=x^2$，$g_a(x)=(2a+3)x-a(a+3)$ とおく．

$$\begin{aligned} g_a(x)-f(x) &= (2a+3)x-a(a+3)-x^2 \\ &= -(x-a)(x-a-3) \end{aligned}$$

$C: y=f(x),\ l_a: y=g_a(x)$ の共有点の x 座標は

$$x=a,\ a+3$$



領域 $D(a)$ は，図の斜線部分で境界線を含む．

したがって，$D(n)$ に含まれる格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+3}\{g_n(k)-f(k)+1\} &= \sum_{k=n}^{n+3}\{-(k-n)(k-n-3)+1\} \\ &= \sum_{k=0}^{3}\{-k(k-3)+1\} \\ &= 1+(2+1)+(2+1)+1=\mathbf{8} \end{aligned}$$

(2) a が整数のとき，(1) の結果から　$D(a)=8,\quad D(a)=D(a+1)$

a が整数でないとき，$A=[a]+1$ とおくと ($[a]$ は a を越えない最大の整数)
$D(a)$ に含まれる格子点の個数は

$$\sum_{k=A}^{A+3}\{g_a(k)-f(k)+1\}=\sum_{k=A}^{A+3}\{-(k-a)(k-a-3)+1\} \qquad (*)$$

$D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=A+1}^{A+4}\{g_{a+1}(k)-f(k)+1\} &= \sum_{k=A+1}^{A+4}\{-(k-a-1)(k-a-4)+1\} \\ &= \sum_{k=A}^{A+3}\{-(k-a)(k-a-3)+1\} \qquad (**) \end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より　$D(a)=D(a+1)$