

平成 31 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) は **1** **2** **3** **4** (90 分) 数 I・A
- 国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学プログラム (植物生命科学・人間科学) は **3** **4** **5** **6** (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学)・先進科学プログラム (化学・生物学) は **2** **3** **5** **6** **7** **9** (150 分) 数 I・II・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・園芸 (園芸, 応用生命, 緑地環境)・先進科学プログラム (物理・工学) **7** **8** **9** **10** **11** (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 **7** **8** **11** **12** **13** (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) **7** **8** **10** **11** **12** **13** (180 分) 数 I・II・III・A・B

1 円に内接する四角形 ABCD において

$$AB = 5, \quad BC = 4, \quad CD = 4, \quad DA = 2$$

とする. また, 対角線 AC と BD の交点を P とおく.

(1) 三角形 APB の外接円の半径を R_1 , 三角形 APD の外接円の半径を R_2 とするとき, $\frac{R_1}{R_2}$ の値を求めよ.

(2) AC の長さを求めよ.

2 次の関数のグラフに関する以下の問いに答えよ. ただし, m は実数とする.

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときのグラフの概形をかけ.

(2) グラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

3 正の約数の個数がちょうど m 個であるような, 1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする.

(1) d_5 を求めよ.

(2) d_{15} を求めよ.

- 4 コインが5枚ある。サイコロを振って出た目によって、これらのコインを1枚ずつ3つの箱A, B, Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚, 箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚, 箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚, 箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A, Bいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。

- 5 三角形ABCにおいて $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ である。頂点Aから辺BCに引いた垂線とBCが交わる点をDとし, 頂点Cから辺ABに引いた垂線とABが交わる点をEとする。また, $\vec{a} = \vec{CA}$, $\vec{b} = \vec{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) \vec{CE} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (2) 直線CEと直線ADの交点をHとするとき, \vec{CH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

- 6 a は0でない実数とし, $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ とおく。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ C と導関数 $y = f'(x)$ のグラフ C' が相異なる3点で交わるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた2つの図形の面積の和を求めよ。

- 7 $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ とし, $n \geq 2$ のとき,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める。

- (1) $n \geq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

- 8 三角形ABCは $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また, 角Aの二等分線と辺BCの交点をDとするとき, $AD = 15$ である。さらに, 三角形ABCの内接円の半径は4である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin \theta$ の値を求めよ。また, $A = \angle BAC$ とするとき, $\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。
- (2) 辺BCの長さを求めよ。

9 コインが5枚ある。サイコロを振って出た目によって、これらのコインを1枚ずつ3つの箱A, B, Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚, 箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚, 箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚, 箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A, B, Cのいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。
- (3) 試行の後に箱Aを開けるとちょうど2枚のコインが入っていた。このとき箱Bにコインがちょうど2枚入っている確率を求めよ。

10 座標平面上の円Cは, 点(0, 0)を通り, 中心が直線 $x + y = 0$ 上にあり, さらに双曲線 $xy = 1$ と接する。このとき, 円Cの方程式を求めよ。ただし, 円と双曲線がある点で接するとは, その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

11 n を正の整数とする。

- (1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta d\theta$ を n の式で表せ。
- (2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta d\theta$ を求めよ。

12 数直線上に動点Pがあり, はじめに原点にあるとする。 $k = 1, 2, \dots$ に対し, k 回目にさいころを振ったとき, 1, 2の目が出たらPは正の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し, 3, 4が出たら負の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し, 5, 6が出たら移動しないとする。 n 回さいころを振った後の点Pの座標を X_n とする。

- (1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ。
- (2) $\frac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。
- (3) ℓ は n 未満の正の整数とする。このとき, $\frac{1}{2^\ell} < X_n$ となる確率を求めよ。

13 a は実数とする. 座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく. いま, x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする.

- (1) n を正の整数とする. このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ.
- (2) 任意の実数 a について, $D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ.

解答例

- 1 (1) $\angle APD = \varphi$ とすると $\angle APB = \pi - \varphi$
 $\triangle APB$, $\triangle APD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{5}{\sin(\pi - \varphi)} = 2R_1, \quad \frac{2}{\sin \varphi} = 2R_2$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi \text{ より}$$

$$2R_1 : 2R_2 = 5 : 2 \quad \text{よって} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{2}$$

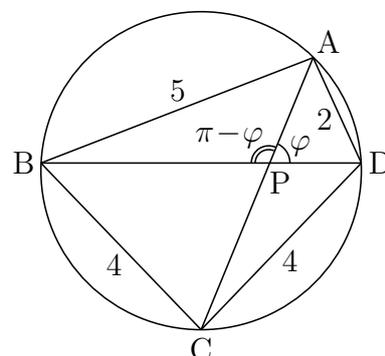
- (2) $\angle ABC = \theta$ とすると $\angle ADC = \pi - \theta$
 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos(\pi - \theta) \\ &= 20 + 16 \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \times 5 \text{ より}$$

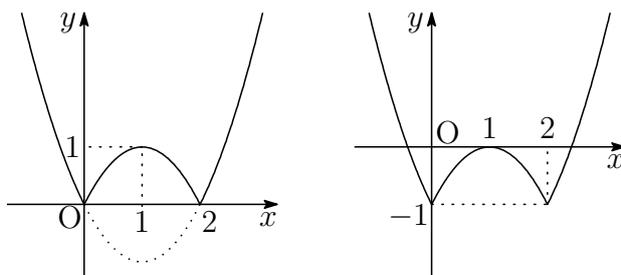
$$7AC^2 = 182 \quad \text{よって} \quad AC = \sqrt{26}$$



- 2 (1) $y = |x^2 - 2mx| - m$ に $m = 1$ を代入すると $y = |x^2 - 2x| - 1$
 $y = |x^2 - 2x|$ (左図) を y 軸方向に -1 だけ平行移動したものが

$$y = |x^2 - 2x| - 1$$

である(右図).

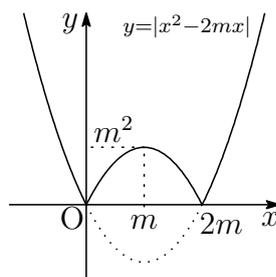


- (2) $y = |x^2 - 2mx| - m$ と x 軸との共有点の x 座標について

$$|x^2 - 2mx| - m = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |x^2 - 2mx| = m \quad \cdots (*)$$

(*) の解は, 放物線 $y = |x^2 - 2mx|$ と直線 $y = m$ の共有点の x 座標であり, これらの共有点の個数は次のとおりである.

- (i) $m < 0$ のとき, 共有点はない
- (ii) $m = 0$ のとき, 共有点は 1 個
- (iii) $m^2 < m$, すなわち, $0 < m < 1$ のとき, 共有点は 2 個
- (iv) $0 < m^2 = m$, すなわち, $m = 1$ のとき, 共有点は 3 個
- (v) $0 < m < m^2$, すなわち, $1 < m$ のとき, 共有点は 4 個



(i)~(v) から

$$\left\{ \begin{array}{ll} m < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ m = 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 0 < m < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ m = 1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 1 < m \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$



- 3 (1) 約数の個数が5個である自然数は、 p^4 (p は素数)で表される。

$$5^4 = 625, \quad 7^4 = 2401$$

よって $d_5 = 2401$

- (2) 約数の個数が15個である自然数は

$$(i) p^{14} \text{ (p は素数)} \quad \text{または} \quad (ii) p^2 q^4 \text{ (p, q は相異なる素数)}$$

で表される。

$$(i) d_{15} = p^{14} \text{ (p は素数) のとき}$$

$$p^{14} \geq 2^{14} = 2^{10} \times 2^4 > 1000 \times 16 = 16000$$

$$(ii) d_{15} = p^2 q^4 \text{ (p, q は相異なる素数) のとき}$$

$$43^2 = 1849, \quad 44^2 = 1936 \text{ であるから}$$

$$p^2 q^4 = 44^2 \quad \text{ゆえに} \quad pq^2 = 11 \times 2^2$$

$$\text{よって} \quad p = 11, \quad q = 2 \quad \text{すなわち} \quad d_{15} = p^2 q^4 = 11^2 \times 2^4 = 1936$$

$$(i), (ii) \text{ より} \quad d_{15} = 1936 \quad \blacksquare$$

- 4 (1) さいころを1回振るとき、コインが箱A, B, Cに入る確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{6}$$

コインが箱A, B, Cにそれぞれ2枚, 2枚, 1枚入る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{3}{6} = 30 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{108}$$

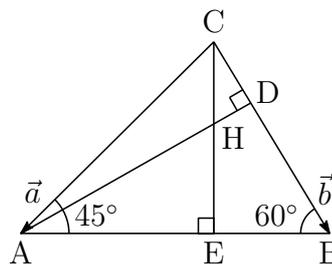
- (2) A, Bに1枚以上コインが入る事象をそれぞれA, Bとすると

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 + \left(1 - \frac{2}{6}\right)^5 - \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)^5 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{4}{6}\right)^5 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \frac{3125 + 1024 - 243}{6^5} = \frac{3906}{6^5} = \frac{217}{432} \end{aligned}$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - \frac{217}{432} = \frac{215}{432} \quad \blacksquare$$

- 5 (1) $AE : EB = \sqrt{3} : 1$ であるから

$$\vec{CE} = \frac{\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3} + 1}$$



- (2) $CE = AE$, $HE = AE \tan 30^\circ$ より

$$\frac{CH}{CE} = \frac{CE - HE}{CE} = \frac{AE - AE \tan 30^\circ}{AE} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } \vec{CH} = \frac{CH}{CE} \vec{CE} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} (\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \quad \blacksquare$$

- 6 (1) $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ より $f'(x) = 3ax^2 + 6ax + 3$

$$g(x) = f(x) - f'(x) \text{ とすると } g(x) = ax^3 - 3(2a - 1)x \quad \cdots (*)$$

3次方程式 $g(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつ a の範囲を求めればよい.

$$g'(x) = 3\{ax^2 - (2a - 1)\}$$

$g'(x) = 0$, すなわち, $x^2 = \frac{2a - 1}{a}$ が異なる2つの実数解をもつから

$$\frac{2a - 1}{a} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(2a - 1) > 0 \quad \text{よって} \quad a < 0, \quad \frac{1}{2} < a$$

- (2) (1) の結果から, $k^2 = \frac{3(2a - 1)}{a}$ とおくと ($k > 0$)

$$g(x) = ax^3 - ak^2x = ax(x^2 - k^2)$$

求める面積を S とすると, S は $y = g(x)$ と x 軸で囲まれ部分の面積であるから, $y = g(x)$ が原点に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^k |g(x)| dx = |a| \int_0^k (-x^3 + k^2x) dx \\ &= |a| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{k^2x^2}{2} \right]_0^k = \frac{|a|}{4} k^4 = \frac{|a|}{4} \cdot \frac{9(2a - 1)^2}{a^2} = \frac{9(2a - 1)^2}{4|a|} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{9(2a - 1)^2}{2|a|} \quad \blacksquare$$

7 (1) $a_1 = 3, a_2 = 2$

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 \quad (n \geq 2) \quad \cdots (*)$$

について、次式が成立することを数学的帰納法により証明する¹.

$$(A) \quad a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1 \quad (n \geq 2)$$

[1] $n = 2$ のとき

$$(*) \text{ により } a_3 = a_2^2 + a_2 - 1 = 2^2 + 2 - 1 = 5$$

$$(A) \text{ より } a_3 = a_1 a_2 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

よって、 $n = 2$ のとき、(A) は成立する。

[2] $n = k$ のとき、(A) が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} + 1 = a_1 a_2 \cdots a_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) により

$$a_{k+2} = a_{k+1}^2 + a_{k+1} - 1 = (a_{k+1} + 1)a_{k+1} - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① を ② に代入すると

$$a_{k+2} = (a_1 a_2 \cdots a_k) a_{k+1} - 1 = a_1 a_2 \cdots a_{k+1} - 1$$

したがって、 $n = k + 1$ のときも、(A) が成立する。

よって、 $n \geq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成立する。

(2) (*) より、 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$ であるから ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 &= a_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2 = 3^2 + \sum_{i=2}^n (a_{i+1} - a_i + 1) \\ &= 9 + a_{n+1} - a_2 + (n - 1) = a_{n+1} + n + 6 \end{aligned}$$

(A) より、 $a_1 a_2 \cdots a_n = a_{n+1} + 1$ であるから

$$a_1 a_2 \cdots a_n + 100 = a_{n+1} + 101$$

$\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つとき、上の 2 式から

$$a_{n+1} + n + 6 = a_{n+1} + 101 \quad \text{よって} \quad n = 95$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf [11] を参照

8 (1) $AB = 2x$, $AC = 2y$ とおく.

$AB + AC = 2BC$ より $BC = x + y$

AD は角 A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 2x : 2y$$

ゆえに $BD = x$, $DC = y$

$$\triangle ABD + \triangle ACD = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot 4 \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 15 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 15 \sin \theta = \frac{1}{2} \{2x + (x + y) + 2y\} \cdot 4$$

したがって $15(x + y) \sin \theta = 6(x + y)$ ゆえに $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$A = 2\theta$ であるから $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin A = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$\cos A = \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

(2) $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると $x^2 = (2x)^2 + 15^2 - 2 \cdot 2x \cdot 15 \cos \theta$

$$x^2 - 4\sqrt{21}x + 75 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

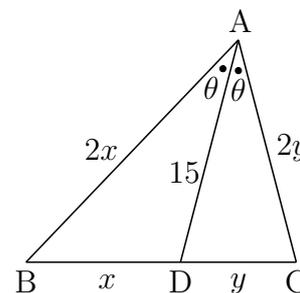
$$y^2 - 4\sqrt{21}y + 75 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$x = y$ のとき, $AB = BC = CA$, すなわち, $\triangle ABC$ は正三角形となり, (1) の結果に反する. したがって, x, y は 2 次方程式

$$t^2 - 4\sqrt{21}t + 75 = 0$$

の解であるから, 解と係数の関係により

$$x + y = 4\sqrt{21} \quad \text{よって} \quad BC = 4\sqrt{21}$$



- 9 (1) さいころを1回振るとき、コインが箱 A, B, Cに入る確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$$

コインが箱 A, B, Cにそれぞれ2枚, 2枚, 1枚入る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{3}{6} = 30 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{108}$$

- (2) A, B, Cに1枚以上コインが入る事象をそれぞれ A, B, Cとすると

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B \cap C}) &= P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C}) \\ &\quad - P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{B} \cap \overline{C}) - P(\overline{C} \cap \overline{A}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 + \left(1 - \frac{2}{6}\right)^5 + \left(1 - \frac{3}{6}\right)^5 \\ &\quad - \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)^5 - \left(1 - \frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right)^5 - \left(1 - \frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right)^5 + 0 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{4}{6}\right)^5 + \left(\frac{3}{6}\right)^5 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 - \left(\frac{1}{6}\right)^5 - \left(\frac{2}{6}\right)^5 \\ &= \frac{5^5 + 4^5 - 1^5 - 2^5}{6^5} = \frac{3125 + 1024 - 1 - 32}{6^5} = \frac{4116}{6^5} = \frac{343}{648} \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - \frac{343}{648} = \frac{305}{648}$$

- (3) Aにちょうど2枚のコインが入っている確率は

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{3 \cdot 6^4}$$

(1)の結果から、求める条件付き確率は

$$\frac{5}{3 \cdot 6^2} \bigg/ \frac{5^4}{3 \cdot 6^4} = \frac{6^2}{5^3} = \frac{36}{125}$$

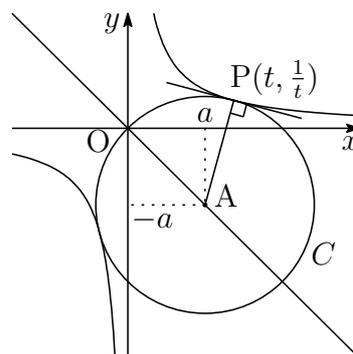


- 10** 円 C の中心を A とすると, A は直線 $x + y = 0$ 上にあるから, $A(a, -a)$ とおく. また, 円と双曲線 $xy = 1$ の接点を $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ とおくと

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

双曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線の傾きは

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}$$



この接線と直線 AP は垂直であるから $-\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\frac{1}{t} + a}{t - a} = -1$

整理すると $(t^2 + 1)(at - t^2 + 1) = 0$ ゆえに $a = t - \frac{1}{t}$... (*)

$AP^2 = OA^2$ であるから $(t - a)^2 + \left(\frac{1}{t} + a\right)^2 = 2a^2$

整理すると $t^2 + \frac{1}{t^2} - 2a\left(t - \frac{1}{t}\right) = 0$

ゆえに $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2 - 2a\left(t - \frac{1}{t}\right) = 0$

(*) より $a^2 + 2 - 2a \cdot a = 0$ ゆえに $a = \pm\sqrt{2}$

C は中心 $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, 半径 2 の円であるから (複号同順)

$$(x \mp \sqrt{2})^2 + (y \pm \sqrt{2})^2 = 4 \quad (\text{複号同順})$$



11 (1) $\tan^n \theta + \tan^{n+2} \theta = \tan^n \theta(1 + \tan^2 \theta) = \frac{\tan^n \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^n \theta(\tan \theta)'$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta(\tan \theta)' d\theta \\ &= \frac{1}{n+1} \left[(\tan^{n+1} \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果に $n = 5, 3, 1$ をそれぞれ代入すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^5 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta d\theta = \frac{(\sqrt{3})^6}{6} = \frac{9}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^5 \theta d\theta = \frac{(\sqrt{3})^4}{4} = \frac{9}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 \theta d\theta = \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

① - ② + ③ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta d\theta = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

また $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan \theta d\theta = \left[-\log \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \log 2$ これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta d\theta = \frac{15}{4} - \log 2$$



12 (1) k 回目にさいころを振ったときに、動点 P は $\frac{a_k}{2^k}$ だけ移動するから

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{-1, 0, 1\}$$

$a_k \neq 0$ でない最小の k を i とする.

$$a_i = 1 \text{ のとき } X_n > \frac{1}{2^i} - \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n} > 0$$

$$a_i = -1 \text{ のとき } X_n < -\frac{1}{2^i} + \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = -\frac{1}{2^n} < 0$$

求める確率は、最初に $i-1$ 回連続して 5, 6 がでて、 i 回目に初めて 1, 2 が出る確率であるから ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^{i-1} \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

補足 初項 a , 末項 l , 公比 r の等比数列の和 S は $S = \frac{a - rl}{1 - r}$

(証明) 項数を n とすると, $l = ar^{n-1}$ より

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - r \cdot ar^{n-1}}{1 - r} = \frac{a - rl}{1 - r}$$

本題では $\frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^n}$

別解 $X_n = 0$ となる確率は, n 回連続して, 5, 6 の目が出る確率である. また, $X_n < 0$ となる確率と $0 < X_n$ となる確率は, 対称性により等しい.

$$P(X_n < 0) + P(X_n = 0) + P(0 < X_n) = 1$$

ゆえに $2P(0 < X_n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$

よって $P(0 < X_n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

(2) (1) で求めた確率を

$$p_n = P(0 < X_n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

とおくと, 1 回目に 1, 2 の目が出て, 点 P が $\frac{1}{2}$ に移動し, その後の $n-1$ 回の移動の和が正である確率であるから

$$\frac{1}{3} \times p_{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

(3) (1) で示した等式から

$$\frac{1}{2^i} - \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \cdots + \frac{1}{2^\ell} \right) = \frac{1}{2^\ell}$$

に着目する. $a_j = 0$ ($1 \leq j < i$), $a_i = 1$ となる i について, 次の (i)~(iii) の場合の確率を求める.

(i) $i < \ell$ のとき

i 回目に初めて 1, 2 が出て $i+1$ 回目から ℓ 回目まで連続 $\ell-i$ 回 3, 4 が出た時点で, P の座標は $\frac{1}{2^\ell}$ となり, その後の $n-\ell$ 回の移動の和が正, または, $i+1$ 回目から ℓ 回目まで連続 $\ell-i$ 回 3, 4 が出なければよいから

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-i} p_{n-\ell} + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-i} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \left\{ \frac{1}{3^\ell} (p_{n-\ell} - 1) + \frac{1}{3^i} \right\} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \left\{ -\frac{1}{2 \cdot 3^\ell} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{3^i} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\ell-1}{3^\ell} - \frac{\ell-1}{3^n} + 1 - \frac{1}{3^{\ell-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ell+2}{3^\ell} - \frac{\ell-1}{3^n} + 1 \right) \end{aligned}$$

(ii) $i = \ell$ のとき, 残りの $n-\ell$ 回の移動の和が正であるから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} \frac{1}{3} p_{n-\ell} = \frac{1}{3^\ell} \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-\ell}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^\ell} - \frac{1}{3^n} \right)$$

(iii) $\ell < i$ のとき, $\frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^\ell}$ に注意すると

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=i}^n \frac{a_k}{2^k} \leq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^\ell} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^\ell} \end{aligned}$$

よって, このときの確率は 0

(i)~(iii) より, 求める確率は

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\ell+2}{3^\ell} - \frac{\ell-1}{3^n} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^\ell} - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ell+1}{3^\ell} - \frac{\ell}{3^n} \right)$$

■

- 13** (1) $f(x) = x^2$, $g_a(x) = (2a+3)x - a(a+3)$ とおく.

$$\begin{aligned} g_a(x) - f(x) &= (2a+3)x - a(a+3) - x^2 \\ &= -(x-a)(x-a-3) \end{aligned}$$

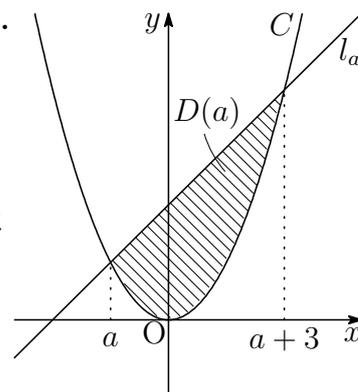
$C: y = f(x)$, $l_a: y = g_a(x)$ の共有点の x 座標は

$$x = a, a+3$$

領域 $D(a)$ は、図の斜線部分で境界線を含む.

したがって、 $D(n)$ に含まれる格子点の個数は

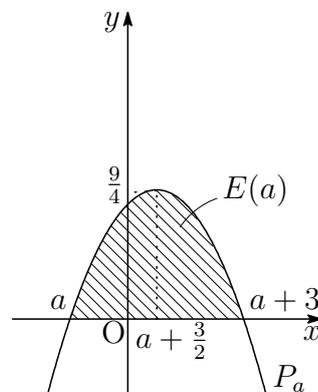
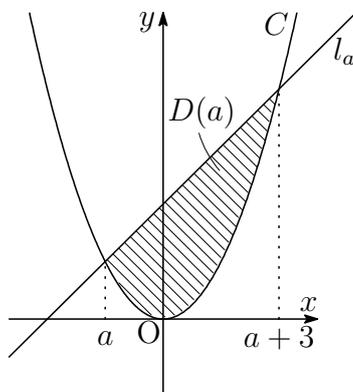
$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+3} \{g_n(k) - f(k) + 1\} &= \sum_{k=n}^{n+3} \{-(k-n)(k-n-3) + 1\} \\ &= \sum_{k=0}^3 \{-k(k-3) + 1\} \\ &= 1 + (2+1) + (2+1) + 1 = 8 \end{aligned}$$



- (2) a が整数のとき、(1)の結果から $D(a) = 8$, $D(a) = D(a+1)$
 a が整数でないとき、整数 n ($a < n < a+3$) について、 $D(a)$ にある直線 $x = n$ 上の格子点の個数は

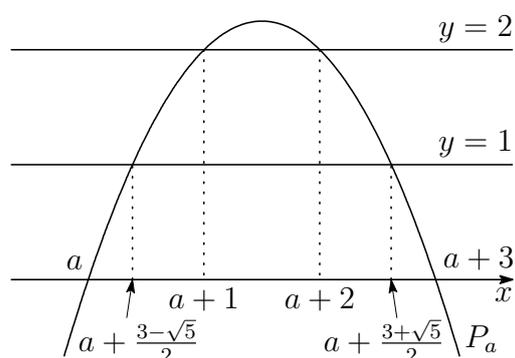
$$\begin{aligned} [(2a+3)n - a(a+3)] - n^2 + 1 &= [(2a+3)n - a(a+3) - n^2] + 1 \\ &= [-(n-a)(n-a-3)] + 1 \end{aligned}$$

$P_a: y = g_a(x) - f(x)$ とし、 P_a と x 軸で囲まれた領域 (境界線を含む) を $E(a)$ とすると、 $E(a)$ 内の格子点の個数と $D(a)$ 内の格子点の個数は等しい. ここで、 $[-(n-a)(n-a-3)]$ は $-(n-a)(n-a-3)$ を越えない最大の整数である.



a が整数でないとき, $E(a)$ 内の格子点の個数は次のようになる.

- $y = 0$ 上の $E(a)$ の格子点の個数は, $a \leq x \leq a + 3$ を満たす整数 x の個数 (3 個)
- $y = 1$ 上の $E(a)$ の格子点の個数は, $a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq a + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ を満たす整数 x の個数 (2 個または 3 個)
- $y = 2$ 上の $E(a)$ の格子点の個数は, $a + 1 \leq x \leq a + 2$ を満たす整数 x の個数 (1 個)



$D(a + 1)$ に含まれる格子点の個数は, $E(a + 1)$ に含まれる格子点の個数に等しい. 領域 $E(a + 1)$ は領域 $E(a)$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから, $E(a + 1)$ に含まれる格子点の個数は $E(a)$ に含まれる格子点の個数に等しい. よって, $D(a + 1)$ に含まれる格子点の個数は, $D(a)$ に含まれる格子点の個数に等しい. ■