平成 30 年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

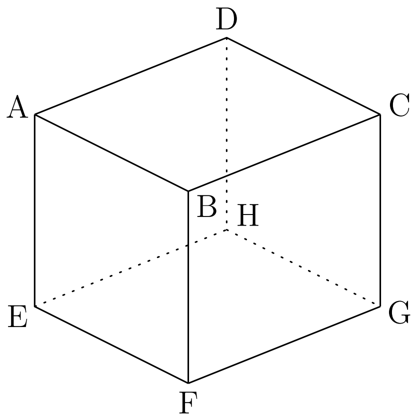
- 教育学部 (中学数学を除く) は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90 分) 数 I・A
- 国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部 (食糧自然経済)・先進科学プログラム (植物生命科学・人間科学) は $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学)・先進科学プログラム (化学・生物学) は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$ (150 分) 数 I・II・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・園芸 (園芸，応用生命，緑地環境)・先進科学プログラム (物理・工学) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{10}$ 〜 $\boxed{12}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{10}$ 〜 $\boxed{12}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

1 a を実数とし，$f(x) = 2x^2 - 4ax + 3a^2 - 4a + 1$ とする．

(1) x に関する 2 次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) a のどんな値に対しても $f(2 + \sqrt{5}) > 0$ であることを示せ．

2 下図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする．線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $\mathrm{OQ} = 2\mathrm{AP} - 1$ を満たしながら動くとき，$\triangle$OPQ の面積の最大値を求めよ．ただし点 P，Q は点 O とは一致しないものとする．



3 $n^{2018} + 2$ が 6 の倍数となるような，$n \geqq 2017$ を満たす自然数 n のうち，3 番目に小さいものを求めよ．

4 箱の中に n 枚のカードが入っている．ただし $n \geqq 3$ とする．そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である．この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す．この操作をくり返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする．

(1) 確率 $P(4)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(6)$ を求めよ．

(3) 確率 $P(11)$ を求めよ．

5 a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする．点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする．

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形を a および t を用いて表せ．

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ．

(3) s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする．領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ．

6 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1,\ 7,\ 13, \cdots$ の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3,\ 7,\ 11, \cdots$ の第 m 項を b_m とする．2 つの数列 $\{a_n\},\ \{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\},\ \{a_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする．したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 13$ となる．

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ．

(2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1,\ 7,\ 13, \cdots$ の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3,\ 7,\ 11, \cdots$ の第 m 項を b_m とする．2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{a_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_\ell\}$ とする．したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_\ell\}$ のはじめの 5 項は $1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 13$ となる．

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{d_\ell\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{d_\ell\}$ の初項から第 ℓ 項までの和 $S_\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} d_i$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 正方形 ABCD の辺を除く内部に，PA$\perp$PB を満たす点 P がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，x，y を α を用いて表せ．

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1) で求めた x，y の和 $x + y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 箱の中に n 枚のカードが入っている．ただし $n \geqq 3$ とする．そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である．この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す．この操作をくり返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率 $P(k)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 次の定積分を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x)\, dt$$

(2) (1) で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めよ．

11 n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード C_1, C_2, $\cdots$, C_{n-1}, C_n がある．初めにこれらのカードを下から C_n, C_{n-1}, $\cdots$, C_2, C_1 の順番に積み上げておく．いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である．積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す．いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す．どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする．

$k = 1, 2, \cdots$ について，k 回目の試行の後にカード C_1 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $P(k,\ \ell)$ $(\ell = 1, 2, \cdots, n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $Q(k,\ \ell)$ で表す．例えば $P(1,\ \ell)$ は ℓ によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい．以下の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ \ell)$ を求めよ．

(2) $P(k,\ \ell)$ を求めよ．

(3) $Q(k,\ \ell)$ を求めよ．

12 複素数 $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha = z + z^8$ とおく．$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする．ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という．

(1) $f(x)$ を求めよ．ただし，$f(x)$ がただ 1 つ決まることは証明しなくてよい．

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=2x^2-4ax+3a^2-4a+1$ (a は実数) について，$f(x)=0$ が実数解をもつとき，その判別式を D_1 とすると

$$D_1/4=(-2a)^2-2(3a^2-4a+1)\geqq 0 \quad \text{整理すると} \quad a^2-4a+1\leqq 0$$

これを解くと　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}\leqq a\leqq 2+\sqrt{3}}$

(2) $k=2+\sqrt{5}$ とおくと　$(k-2)^2=5$　ゆえに　$k^2=4k+1 \quad \cdots(*)$

$(*)$ を利用すると

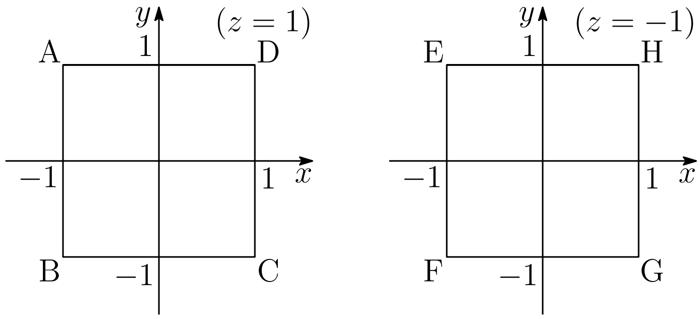
$$\begin{aligned} f(k)&=2k^2-4ak+3a^2-4a+1\\ &=2(4k+1)-4ak+3a^2-4a+1\\ &=3a^2-4(k+1)a+8k+3 \end{aligned}$$

a に関する 2 次方程式 $3a^2-4(k+1)a+8k+3=0$ の判別式を D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_2/4&=\{-2(k+1)\}^2-3(8k+3)=4k^2-16k-5\\ &=4(4k+1)-16k-5=-1<0 \end{aligned}$$

よって，a のどんな値に対しても　$f(k)=f(2+\sqrt{5})>0$

2 (1) 空間の点として，O(0, 0, 0)，A$(-1,\ 1,\ 1)$，D$(1,\ 1,\ 1)$ をとる．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1,\ 1,\ 1)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$t=\mathrm{AP}$ とおくと　$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}-\mathrm{AP}=\sqrt{3}-t$，$\mathrm{OQ}=2\mathrm{AP}-1=2t-1$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\theta=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-t)(2t-1)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}(2\sqrt{3}-2t)(2t-1)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

2 つの正の数 $2\sqrt{3}-2t$ と $2t-1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$(2\sqrt{3}-2t)+(2t-1)\geqq 2\sqrt{(2\sqrt{3}-2t)(2t-1)}$$

したがって　$(2\sqrt{3}-2t)(2t-1)\leqq\dfrac{(2\sqrt{3}-1)^2}{4}\quad\cdots(**)$

なお，$(**)$ において等号が成立するとき

$$2\sqrt{3}-2t=2t-1\quad \text{すなわち}\quad t=\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\triangle\mathrm{OPQ}\leqq\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{(2\sqrt{3}-1)^2}{4}=\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}$$

よって，$\triangle$OPQ の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 法 2 について

$$
\begin{aligned}
&n \equiv 0 \text{ のとき} \quad n^{2018}+2 \equiv 0 && \pmod 2\\
&n \equiv 1 \text{ のとき} \quad n^{2018}+2 \equiv 1^{2018}+2 \equiv 1 && \pmod 2
\end{aligned}
$$

また，法 3 について

$$
\begin{aligned}
&n \equiv 0 \text{ のとき} \quad n^{2018}+2 \equiv 2 && \pmod 3\\
&n \equiv \pm 1 \text{ のとき} \quad n^{2018}+2 \equiv (\pm 1)^{2018}+2 \equiv 0 && \pmod 3
\end{aligned}
$$

条件を満たす自然数 n は

$$n \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{かつ} \quad n \equiv \pm 1 \pmod 3 \quad \cdots (*)$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ について，$(*)$ を満たすのは　$n=2,\ 4$

したがって，条件を満たす自然数 n は　　$n \equiv 2,\ 4 \pmod 6$

$$2016 \equiv 0, \quad 2018 \equiv 2, \quad 2020 \equiv 4, \quad 2022 \equiv 0, \quad 2024 \equiv 2 \pmod 6$$

$n \geqq 2017$ を満たす自然数のうち，3 番目に小さいのは　　**2024**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 金色のカード，銀色のカード，白色のカードを 1 枚取り出す事象を，それぞれ，A，B，C とする．

最初の 3 回で A が 2 回，C が 1 回，4 回目に A が起きる確率であるから

$$P(4) = \frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{3(n-2)^2}{n^4}}$$

(2) (i) 6 回目に A が起きるとき，最初の 5 回は

「A が 1 回，C が 4 回」「B が 5 回」であるから

$$\left\{\frac{5!}{1!4!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^5\right\}\frac{1}{n} = \frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii) 6 回目に B が起きるとき，最初の 5 回は

「A が 1 回，B が 4 回」であるから

$$\frac{5!}{1!4!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} = \frac{5}{n^6}$$

よって，求める確率は

$$P(6) = \frac{5(n-2)^4+1}{n^6} + \frac{5}{n^6} = \boldsymbol{\frac{5(n-2)^4+6}{n^6}}$$

(3) (i) 11 回目に A が起きるとき，最初の 10 回は
「A が 1 回，C が 9 回」「B が 5 回，C が 5 回」であるから

$$\left\{\frac{10!}{1!9!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^9+\frac{10!}{5!5!}\left(\frac{1}{n}\right)^5\left(\frac{n-2}{n}\right)^5\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii) 11 回目に B が起きるとき，最初の 10 回は
「A が 1 回，B が 4 回，C が 5 回」「B が 9 回，C が 1 回」であるから

$$\left\{\frac{10!}{1!4!5!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^4\left(\frac{n-2}{n}\right)^5+\frac{10!}{9!1!}\left(\frac{1}{n}\right)^9\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

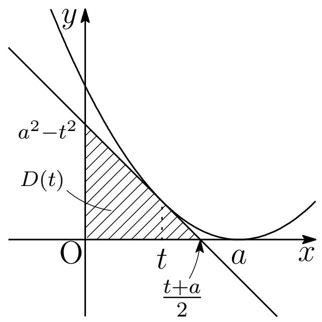
よって，求める確率は

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=(x-a)^2$ とおくと　$f'(x)=2(x-a)$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$y=2(t-a)(x-t)+(t-a)^2$$



すなわち　$y=2(t-a)x+a^2-t^2$

この接線の x 軸および y 軸との交点は，それぞれ

$$\left(\frac{t+a}{2},\ 0\right),\quad (0,\ a^2-t^2)$$

よって，$D(t)$ の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}\cdot(a^2-t^2)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(a+t)^2(a-t)}$$

(2) 3 つの正の数 $a+t,\ a+t,\ 2(a-t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(a+t)+(a+t)+2(a-t)}{3}\geqq\sqrt[3]{2(a+t)^2(a-t)}$$

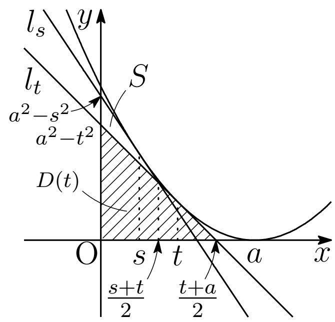
したがって　$(a+t)^2(a-t)\leqq\dfrac{32}{27}a^3\quad\cdots(*)$

$(*)$ において，等号が成立するとき

$$a+t=2(a-t)\quad すなわち\quad t=\frac{a}{3}$$

(1) の結果および $(*)$ から　$S(t)=\dfrac{1}{4}(a+t)^2(a-t)\leqq\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{32}{27}a^3=\dfrac{8}{27}a^3$

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{27}a^3}$



(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ f(s))$，$(t,\ f(t))$ における接線をそれぞれ l_s，l_t とすると，(1) で求めた結果から

$$l_s : y = 2(s-a)x + a^2 - s^2$$
$$l_t : y = 2(t-a)x + a^2 - t^2$$

l_s と l_t の交点の x 座標は，上の 2 式から

$$2(s-t)x - s^2 + t^2 = 0 \quad ゆえに \quad x = \frac{s+t}{2}$$

2 直線 l_s，l_t および y 軸で囲まれた図形 (三角形) の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+t}{2}\{(a^2-s^2)-(a^2-t^2)\} = \frac{1}{4}(t+s)^2(t-s) \quad \cdots(*)$$

$D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積を F とすると　　$F = S + S(t)$
t を固定したとき，F が最大となるのは，S が最大となるときである．
3 つの正の数 $t+s,\ t+s,\ 2(t-s)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(t+s)+(t+s)+2(t-s)}{3} \geqq \sqrt[3]{2(t+s)^2(t-s)}$$

したがって　$(t+s)^2(t-s) \leqq \dfrac{32}{27}t^3$　ゆえに　$S \leqq \dfrac{8}{27}t^3 \quad \cdots$①

上式で等号が成立するとき　$t+s = 2(t-s)$　すなわち　$s = \dfrac{1}{3}t \quad \cdots$②

$s = \dfrac{1}{3}t$ のとき，① および (1) の結果から

$$F = \frac{8}{27}t^3 + \frac{1}{4}(a+t)^2(a-t) \quad \cdots(**)$$

これを t について微分すると $(0<t<a)$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{8}{9}t^2 + \frac{1}{4}(-3t^2 - 2at + a^2)\\ &= \frac{1}{36}(5t^2 - 18at + 9a^2)\\ &= \frac{1}{36}(t-3a)(5t-3a)\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$\frac{dF}{dt}$		$+$	0	$-$	
F		↗	極大	↘	

$t = \dfrac{3}{5}a$ のとき，F は最大となる．②，$(**)$ より

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{5}a,\ t = \frac{3}{5}a}\ \textbf{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{8}{25}a^3}$$

別解 t を固定することで，$s=\frac{1}{3}t \cdots$ ② を求めた．

逆に，s を固定すると，(1) の結果および (*) より

$$\begin{aligned} F = S + S(t) &= \frac{1}{4}(t+s)^2(t-s) + \frac{1}{4}(a+t)^2(a-t) \\ &= \frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3) + \frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3) \\ &= -(a-s)t^2 + (a^2-s^2)t + a^3 - s^3 \\ &= (a-s)\{-t^2+(a+s)t+(a^2+as+s^2)\} \end{aligned}$$

a，s は定数であるから，$-t^2+(a+s)t$ を最大にするときである．

$$-t^2+(a+s)t = -\left(t-\frac{a+s}{2}\right)^2 + \frac{(a+s)^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{a+s}{2}$$

これと ② を連立すると　$s=\frac{1}{5}a,\quad t=\frac{3}{5}a,$　最大値 $\frac{8}{25}a^3$

補足 (2) の曲線 $y=f(x)$ の 2 接線 l_s と l_t の交点の x 座標は，s と t の中央．

(1) の l_t と $l_a: y=0$ (x 軸) との交点の x 座標は，t と a の中央．

また，2 接線と放物線との面積の関係式も重要である[1]．

発展 t を固定して (t を定数とみて)，F を s で微分する (偏微分) ことを

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -3s^2-2st+t^2 = (t+s)(t-3s)$$

と表す (∂ は partial と読む)．F を t で偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (a-s)(-2t+a+s)$$

$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ を解くと，$s=\frac{1}{5}a$，$t=\frac{3}{5}a$ を得る．このとき

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -6s-2t < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -2(a-s) < 0 \quad (\text{ともに負})$$

であるから，極大である．また，$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} > 0$，$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} > 0$ (ともに正) のとき極小である．$(s,\ t,\ F)$ のグラフを考えると，$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} > 0$ である点は楕円点，$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} < 0$ である点は双曲点 (鞍点) である．

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ は，公差がそれぞれ 6，4 の等差数列であるから

$$a_{n+2} = a_n + 12, \quad b_{m+3} = b_m + 12$$

$a_n = b_m$ のとき，$a_{n+2} = m_{m+3}$ であるから，$\{a_n\}$ の最初の 2 項と $\{b_m\}$ の最初の 3 項で共通に現れる数は

$$(*) \quad a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ b_1 = 3,\ b_2 = 7,\ b_3 = 11 \quad \text{ゆえに} \quad c_1 = 7$$

数列 $\{c_k\}$ は，$c_1 = 7$，公差 12 の等差数列であるから

$$c_k = 7 + 12(k-1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_k = 12k - 5}$$

(2) $(*)$ で示した a_1，a_2，b_1，b_2，b_3 より

$$d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 7,\ d_4 = 11$$

群数列

$$|\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\ |\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_8\ |\ \cdots\ |\ d_{4j-3},\ d_{4j-2},\ d_{4j-1},\ d_{4j}\ |\ \cdots$$

を考えると

$$\begin{aligned} d_{4j-3} &= d_1 + 12(j-1), \\ d_{4j-2} &= d_2 + 12(j-1), \\ d_{4j-1} &= d_3 + 12(j-1), \\ d_{4j} &= d_4 + 12(j-1) \end{aligned}$$

上の第 4 式，第 1 式にそれぞれ $j = 250$，$j = 251$ を代入すると

$$\begin{aligned} d_{1000} &= d_4 + 12 \times (250 - 1) = 11 + 12 \times 249 = \mathbf{2999} \\ d_{1001} &= d_1 + 12 \times (251 - 1) = 1 + 12 \times 250 = \mathbf{3001} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ は，公差がそれぞれ 6，4 の等差数列であるから

$$a_{n+2} = a_n + 12, \quad b_{m+3} = b_m + 12$$

$a_n = b_m$ のとき，$a_{n+2} = m_{m+3}$ であるから，$\{a_n\}$ の最初の 2 項と $\{b_m\}$ の最初の 3 項で共通に現れる数は

$$(*) \quad a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ b_1 = 3,\ b_2 = 7,\ b_3 = 11 \quad \text{ゆえに} \quad c_1 = 7$$

数列 $\{c_k\}$ は，$c_1 = 7$，公差 12 の等差数列であるから

$$c_k = 7 + 12(k-1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_k = 12k - 5}$$

(2) $(*)$ で示した a_1，a_2，b_1，b_2，b_3 より

$$d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 7,\ d_4 = 11$$

群数列

$$|\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\ |\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_8\ |\ \cdots\ |\ d_{4j-3},\ d_{4j-2},\ d_{4j-1},\ d_{4j}\ |\ \cdots$$

を考えると

$$\begin{aligned} d_{4j-3} &= d_1 + 12(j-1) = 12j - 11 = 3(4j-3) - 2, \\ d_{4j-2} &= d_2 + 12(j-1) = 12j - 9 = 3(4j-2) - 3, \\ d_{4j-1} &= d_3 + 12(j-1) = 12j - 5 = 3(4j-1) - 2, \\ d_{4j} &= d_4 + 12(j-1) = 12j - 1 = 3\cdot 4j - 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \qquad \boldsymbol{d_\ell = \begin{cases} 3\ell - 2 & (\ell \equiv 1, 3 \pmod 4) \\ 3\ell - 3 & (\ell \equiv 2 \pmod 4) \\ 3\ell - 1 & (\ell \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}}$$

(3) (2) の結果に注意して

$$\varepsilon_\ell = \begin{cases} 0 & (\ell \equiv 1, 3 \pmod 4) \\ -1 & (\ell \equiv 2 \pmod 4) \\ 1 & (\ell \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}$$

とおくと $(\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 0,\ \varepsilon_4 = 1)$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & (\ell \equiv 0, 1 \pmod 4) \\ -1 & (\ell \equiv 2, 3 \pmod 4) \end{cases}$$

$d_\ell = 3\ell - 2 + \varepsilon_\ell$ であるから

$$\begin{aligned} S_\ell &= \sum_{i=1}^{\ell} d_i = \sum_{i=1}^{\ell}(3i-2) + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i = \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{1}{2}\ell + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\ell^2 - \dfrac{1}{2}\ell} & \boldsymbol{(\ell \equiv 0, 1 \pmod 4)} \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\ell^2 - \dfrac{1}{2}\ell - 1} & \boldsymbol{(\ell \equiv 2, 3 \pmod 4)} \end{cases} \end{aligned}$$

発展 周期数列 $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right\}$，$\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$，$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$，$\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ の最初の 4 項を成分とする行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

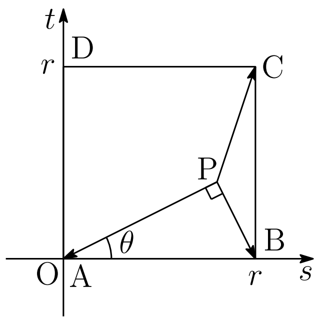
は，正則であるから，任意の周期 4 の数列は，上の数列の線形結合として表現できる．例えば，数列 $1,\ 0,\ 0,\ 0, \cdots$ は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

本題の数列 d_ℓ，S_ℓ の一般項を次のように表すこともできる．

$$\begin{aligned} d_\ell &= 3\ell - 2 + \cos\frac{\ell\pi}{2}, \\ S_\ell &= \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\ell\pi}{2} + \cos\frac{\ell\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1) 正方形の一辺の長さを r，$\theta=\angle\mathrm{PAB}$ とし，右図のように，st 座標平面に $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(r,\ 0)$，$\mathrm{C}(r,\ r)$，$\mathrm{D}(0,\ r)$ をとると，$\mathrm{AP}=r\cos\theta$ より



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\mathrm{AP}(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=r(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\tan\theta$ より

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\alpha^2},\quad \sin\theta\cos\theta=\tan\theta\cos^2\theta=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=r\left(\dfrac{1}{1+\alpha^2},\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\quad\cdots①$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-x\overrightarrow{\mathrm{AP}}+y(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$$(x+y-1)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=y\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots(*)$$

また　$y\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=y(r,\ 0)-(r,\ r)=r(y-1,-1)\quad\cdots②$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$(x+y-1)r\left(\frac{1}{1+\alpha^2},\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)=r(y-1,-1)$$

したがって　$\dfrac{x+y-1}{1+\alpha^2}=y-1,\quad \dfrac{\alpha(x+y-1)}{1+\alpha^2}=-1\quad\cdots(**)$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると　$\alpha(y-1)=-1\cdots③$

$(**)$ の第 2 式から　$\dfrac{\alpha x+\alpha(y-1)}{\alpha^2+1}=-1$　③ を代入すると

$\dfrac{\alpha x-1}{1+\alpha^2}=-1$　ゆえに　$\boldsymbol{x=-\alpha}$，　③を解くと　$\boldsymbol{y=1-\dfrac{1}{\alpha}}$

(2) (1) の結果から　$x+y=-\alpha+\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)=-1-\left(\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\leqq-1$

よって，最大値 $\mathbf{-1}$．このとき，$\alpha=\tan\theta=1$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　**点 P は対角線 AC の中点**

$\boxed{\mathbf{9}}$ 金色のカード，銀色のカード，白色のカードを１枚取り出す事象を，それぞれ，A，B，C とする．また，これらの事象の起きる確率をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすると

$$a = b = \frac{1}{n},\ c = \frac{n-2}{n}$$

- k 回目に A が起きるとき，最初の $k-1$ 回は

「A が１回，C が $k-2$ 回」「B が５回，C が $k-6$ 回」

であり，それぞれの確率を $P_g(1,\ 0,\ k-2)$，$P_g(0,\ 5,\ k-6)$ とおくと

$$\begin{aligned} P_g(1,\ 0,\ k-2) &= \frac{(k-1)!}{1!(k-2)!}a^1c^{k-2} \times a \\ &= (k-1)a^2c^{k-2} = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} \qquad (1) \\ P_g(0,\ 5,\ k-6) &= \frac{(k-1)!}{5!(k-6)!}b^5c^{k-6} \times a \\ &= \frac{ab^5c^{k-6}}{120}\prod_{j=1}^{5}(k-j) = \frac{(n-2)^{k-6}}{120n^k}\prod_{j=1}^{5}(k-j) \qquad (2) \end{aligned}$$

- k 回目に B が起きるとき，最初の $k-1$ 回は

「A が１回，B が４回，C が $k-6$ 回」「B が９回，C が $k-10$ 回」

であり，それぞれの確率を $P_s(1,\ 4,\ k-6)$，$P_s(0,\ 9,\ k-10)$ とおくと

$$\begin{aligned} P_s(1,\ 4,\ k-6) &= \frac{(k-1)!}{1!4!(k-6)!}a^1b^4c^{k-6} \times b \\ &= \frac{ab^5c^{k-6}}{24n^k}\prod_{j=1}^{5}(k-j) = \frac{(n-2)^{k-6}}{24n^k}\prod_{j=1}^{5}(k-j) \qquad (3) \\ P_s(0,\ 9,\ k-10) &= \frac{(k-1)!}{9!(k-10)!}b^9c^{k-10} \times b \\ &= \frac{b^{10}c^{k-10}}{9!}\prod_{j=1}^{9}(k-j) = \frac{(n-2)^{k-10}}{9!n^k}\prod_{j=1}^{9}(k-j) \qquad (4) \end{aligned}$$

(1) において $k \leqq 1$ のとき，(2)，(3) において $k \leqq 5$ のとき，(4) において $k \leqq 9$ のとき，0 となり，このときも (1)〜(4) は成立することに注意すると，求める確率 $P(k)$ は，(1)〜(4) の和であるから

$$\boldsymbol{P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{(n-2)^{k-6}}{20n^k}\prod_{j=1}^{5}(k-j) + \frac{(n-2)^{k-10}}{9!n^k}\prod_{j=1}^{9}(k-j)}$$

補足 千葉大入試会場では，全学部の問題をすべて掲載した問題冊子が配布される．本題は大問だけの出題であるが，解答の手がかりが $\boxed{4}$ の小問にある．とくに，理系学部の受験生は，文系学部の出題についても目配りを忘れてはならない．

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt$ について，$u=t+x$ とおくと

$$\frac{dt}{du}=1,\qquad \begin{array}{c||c} t & 0 \longrightarrow x \\ \hline u & x \longrightarrow 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} e^{u-2x}\sin u\,du = e^{-2x}\int_x^{2x} e^u \sin u\,du \\ &= e^{-2x}\left[\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)\right]_x^{2x} \\ &= e^{-2x}\left\{\frac{1}{2}e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)-\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)} \end{aligned}$$

(2) (1) の計算から，関数 $G(u)$ とその導関数 $g(u)$ を

$$G(u)=\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u),\quad g(u)=e^u\sin u$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x}\int_x^{2x} g(u)\,du = e^{-2x}\{G(2x)-G(x)\} \\ &= e^{-2x}\{G(2x)-G(0)-G(x)+G(0)\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{-2x}\left\{\frac{G(2x)-G(0)}{x}-\frac{G(x)-G(0)}{x}\right\} \\ &= e^0\{2g(0)-g(0)\} = g(0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) C_1 の 1 回目，2 回目の試行後の上からの位置は，次のように推移する．

(i) $\ell = 1$ のとき　$1 \to 1,\quad 2 \to 1$

(ii) $1 < \ell < n$ のとき　$1 \to \ell,\quad \ell \to \ell,\quad \ell+1 \to \ell$

(iii) $\ell = n$ のとき　$1 \to n,\quad n \to n$

(i)〜(iii) について，$P(2,\ \ell)$ の確率は

$$\begin{aligned}
P(2,\ 1) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\\
P(2,\ \ell) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\ell-1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-\ell}{n} = \frac{1}{n} \qquad (1 < \ell < n)\\
P(2,\ n) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{P(2,\ \ell) = \dfrac{1}{n} \quad (\ell = 1, 2, \cdots, n)}$

(2) $P(1,\ \ell) = \dfrac{1}{n}$，$P(2,\ \ell) = \dfrac{1}{n}$ より

$$(*) \quad P(k,\ \ell) = \frac{1}{n} \quad (k\ \text{は自然数},\ \ell = 1, 2, \cdots, n)$$

と推測し，k に関する数学的帰納法により証明する．

［1］$k = 1$ のとき，$(*)$ は明らかに成立する．

［2］$k = j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．C_1 の j 回目，$j+1$ 回目の試行後の上からの位置も，(i)〜(iii) と同じ推移により

$$\begin{aligned}
P(j+1,\ 1) &= P(j,\ 1) \times \frac{1}{n} + P(j,\ 2) \times \frac{n-1}{n}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\\
P(j+1,\ \ell) &= P(j,\ 1) \times \frac{1}{n} + P(j,\ \ell) \times \frac{\ell-1}{n} + P(j,\ \ell+1) \times \frac{n-\ell}{n}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\ell-1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-\ell}{n} = \frac{1}{n} \qquad (1 < \ell < n)\\
P(j+1,\ n) &= P(j,\ 1) \times \frac{1}{n} + P(j,\ n) \times \frac{n-1}{n}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

したがって，$k = j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］［2］より，すべての自然数 k について，$(*)$ が成立する．

よって　$\boldsymbol{P(k,\ \ell) = \dfrac{1}{n}}$　**($\boldsymbol{k}$ は自然数，$\boldsymbol{\ell = 1, 2, \cdots, n}$)**

(3) 1 回後に C_2 が上から ℓ 番目にある確率 $Q(1,\ \ell)$ は

$$(**)\quad Q(1,\ 1)=\frac{n-1}{n},\quad Q(1,\ 2)=\frac{1}{n},\quad Q(1,\ \ell)=0\ \ (3 \leqq \ell \leqq n)$$

$Q(k+1,\ \ell)$ を $P(k,\ \ell)$ と $Q(k,\ \ell)$ を用いた確率漸化式を求める．

(a) C_2 が 1 回目の試行で 1 番上にあるとき，残りの k 回の試行で上から ℓ 番目にくる確率，すなわち，C_1 が k 回後に上から ℓ 番目にくる確率 $P(k,\ \ell)$ に等しい

(b) C_2 が 1 回目の試行で上から 2 番目にあるとき，残りの k 回の試行で上から ℓ 番目にくる確率，すなわち，C_2 が k 回後に上から ℓ 番目にくる確率 $Q(k,\ \ell)$ に等しい

(a), (b) から次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} Q(k+1,\ \ell) &= Q(1,\ 1)P(k,\ \ell)+Q(1,\ 2)Q(k,\ \ell) \\ &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}Q(k,\ \ell) \\ &= \frac{1}{n}Q(k,\ \ell)+\frac{n-1}{n^2} \end{aligned}$$

これから　$Q(k+1,\ \ell)-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\left\{Q(k,\ \ell)-\dfrac{1}{n}\right\}$

したがって　$Q(k,\ \ell)-\dfrac{1}{n}=\left\{Q(1,\ \ell)-\dfrac{1}{n}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$

$(**)$ より，$Q(k,\ \ell)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q(k,\ 1)} &= \boldsymbol{\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}} \\ \boldsymbol{Q(k,\ 2)} &= \boldsymbol{\frac{1}{n}} \\ \boldsymbol{Q(k,\ \ell)} &= \boldsymbol{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{k}} \quad \boldsymbol{(3 \leqq \ell \leqq n)} \end{aligned}$$

補足 本題と同じ考え方による確率漸化式が東京大学理系 2015 年 $\boxed{2}$ (確率) でも出題されている[2]．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2015.pdf $\boxed{2}$ を参照

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ より，z は方程式 $x^9-1=0$ の解であるから

$$\begin{aligned} z^9-1&=(z-1)(z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)\\ &=(z-1)(z^2+z+1)(z^6+z^3+1)=0 \end{aligned}$$

したがって　$(z-1)\left(z+\dfrac{1}{z}+1\right)\left(z^3+\dfrac{1}{z^3}+1\right)=0$

$\alpha=z+z^8=z+\dfrac{1}{z}$，$z^3+\dfrac{1}{z^3}=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=\alpha^3-3\alpha$ より

$$(z-1)(\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha+1)=0$$

$z\neq1$，$\alpha=z+\dfrac{1}{z}=2\cos\dfrac{2\pi}{9}\neq-1$ であるから　$\alpha^3-3\alpha+1=0$

したがって，$f(x)=x^3-3x+1$ とすると　$f(\alpha)=0$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=x^3-3x+1}$

別解 3 倍角の公式

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

に $\theta=\dfrac{2\pi}{9}$ を代入すると，$\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ より

$$-\frac{1}{2}=4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3-3\cdot\frac{\alpha}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\alpha^3-3\alpha+1=0$$

(2) 方程式 $x^9-1=0$ より

$$\begin{aligned} x^9-1&=\prod_{k=0}^{8}(x-z^k)=(x-1)\prod_{k=1}^{4}(x-z^k)\left(x-\frac{1}{z^k}\right)\\ &=(x-1)\prod_{k=1}^{4}\left\{x^2-\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)x+1\right\}=0 \end{aligned}$$

$z^k+\dfrac{1}{z^k}=\alpha_k$ とおくと $(k=1,2,3,4)$，$\alpha_3=-1$ であるから

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^2-\alpha_1x+1)(x^2-\alpha_2x+1)(x^2-\alpha_4x+1)=0\quad(*)$$

$(*)$ と $x^9-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)=0$ の因数を比較すると

$$x^6+x^3+1=(x^2-\alpha_1x+1)(x^2-\alpha_2x+1)(x^2-\alpha_4x+1)$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}+1=\left(x+\frac{1}{x}-\alpha_1\right)\left(x+\frac{1}{x}-\alpha_2\right)\left(x+\frac{1}{x}-\alpha_4\right)$$

$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f(t)=t^3-3t+1=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_4)$$

$\alpha_1=\alpha$ であるから，3 次方程式 $f(t)=0$ の $\alpha=z+\dfrac{1}{z}$ 以外の 2 つの解は

$$\begin{aligned}\alpha_2&=z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2=\alpha^2-2,\\ \alpha_4&=z^4+\frac{1}{z^4}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-2=(\alpha^2-2)^2-2\\ &=\alpha^4-4\alpha^2+2\end{aligned}$$

ここで，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ より，$\alpha^4=3\alpha^2-\alpha$ であるから

$$\alpha_4=(3\alpha^2-\alpha)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

よって，求める他の 2 つの解は　$\boldsymbol{\alpha^2-2,\ -\alpha^2-\alpha+2}$

補足 3 次方程式 $f(t)=0$ と $f(x)=0$ の解については同一であり，気になるのであれば

$$f(x)=x^3-3x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)$$

のようにするとよい．

別解 $\theta=\dfrac{2\pi}{9}$ とし，2 倍角の公式

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

を利用すると，$\alpha=z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\alpha_2&=z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)\\ &=(2\cos\theta)^2-2=\alpha^2-2,\\ \alpha_4&=z^4+\frac{1}{z^4}=2\cos 4\theta=2(2\cos^2 2\theta-1)\\ &=(2\cos 2\theta)^2-2=(\alpha^2-2)^2-2\\ &=\alpha^4-4\alpha^2+2\end{aligned}$$