平成 29 年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90 分) 数 I・A
- 国際教養・文 (行動科学)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (植物生命科学・人間科学) $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学)・先進科学プログラム (化学・生物学) $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$ (150 分) 数 I・II・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・先進科学プログラム (物理・工学) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 定数 a は $0 \leqq a \leqq 1$ をみたすとする．座標平面上に 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$，C$(a,\ 0)$ をとる．点 P は線分 OA 上，点 Q は線分 OB 上にあり，PQ$\perp$OA をみたすものとする．点 P が点 O と点 C 以外を動くときの $\triangle$PQC の面積の最大値を S とする．

(1) $a = 1$ のときの S を求めよ．

(2) S を a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ \sqrt{3})$，B$(9,\ 0)$ がある．線分 OB 上に 2 点 P，Q を $\angle\mathrm{PAQ} = 90^\circ$ となるようにとる．ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする．$\angle\mathrm{APQ} = \theta$ とし，$\triangle$APQ の面積を S とする．

(1) S を θ を用いて表せ．

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ．

(3) S が $\triangle$AOB の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b を正の整数とするとき，次を証明せよ．

(1) $a^3 - a$ は 3 の倍数である．

(2) $a - b$ が 3 の倍数ならば，$a^3 - b^3$ は 9 の倍数である．

(3) $a^3 - b^3$ は，3 の倍数ならば 9 の倍数である．

4 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める．

- 1 回目は，出た目が得点になる．
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる．
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる．

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする．

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ．

(2) p_6 を求めよ．

5 n を 4 以上の整数とする．座標平面上で正 n 角形 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\cdots$，$\mathrm{A_n}$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく．そして，線分 $\mathrm{A_1A_3}$ と線分 $\mathrm{A_2A_4}$ との交点 P は線分 $\mathrm{A_1A_3}$ を $t:1-t$ に内分するとする．

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ．

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2} \leqq t < \dfrac{3}{4}$ を示せ．

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} > \dfrac{1}{12}$ を示せ．

6 座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする．

(1) $n=3$ をみたすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(2) $-3a<b$ かつ $n \leqq 2$ をみたすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ 1個のさいころを3回投げて，以下のルールで各回の得点を決める．

- 1回目は，出た目が得点になる．
- 2回目は，出た目が1回目と同じならば得点は0，異なれば出た目が得点になる．
- 3回目は，出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0，どちらとも異なれば出た目が得点になる．

3回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする．

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ．

(2) p_6 を求めよ．

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ．

$\boxed{8}$ t を0以上の実数とし，Oを原点とする座標平面上の2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で3つの条件

$$\mathrm{PQ}=2,\quad p<q,\quad p+q=\sqrt{t}$$

をみたすものを考える．$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とする．ただし，点Pまたは点Qが原点Oと一致する場合は $S=0$ とする．

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) S を t を用いて表せ．

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ．

$\boxed{9}$ 複素数平面上の点 $z\left(z\neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする．

(1) 点 z が原点を中心とする半径1の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ．

(2) 点 z が点 α を中心とする半径1の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く．このような r と α の組をすべて求めよ．

$\boxed{10}$ 曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする．C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が $t\ (t\geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする．C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．

(1) C の方程式を求めよ．

(2) $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ1つ存在することを示せ．

11 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_5 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ.

12 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする．C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする．C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする.

(1) C の方程式を求めよ.

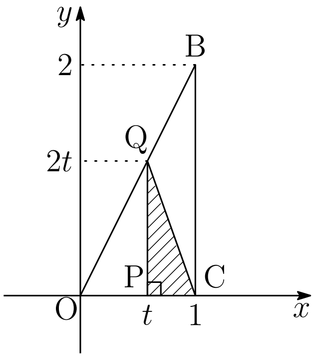
(2) $S(t)$ を求めよ.

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ.

(4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha > \log \dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$ となることを示せ．必要ならば $\log \dfrac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P$(t,\ 0)$，Q$(t,\ 2t)$ とすると



$$\triangle\mathrm{PQC} = \frac{1}{2}(1-t)\cdot 2t = -t^2+t$$
$$= -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

△PQC は，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{1}{4}}$

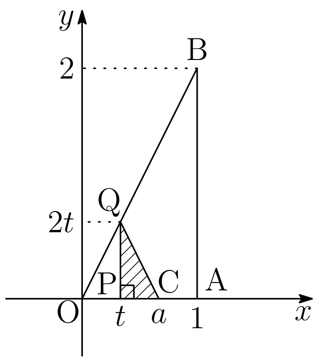
(2) P$(t,\ 0)$，Q$(t,\ 2t)$ とする．

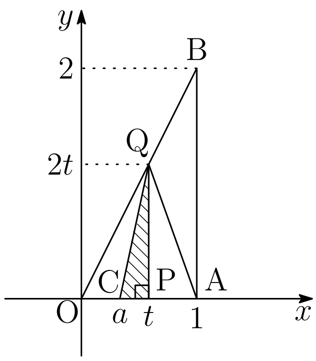
(i) $0 \leqq t < a$ のとき

$$\triangle\mathrm{PQC} = \frac{1}{2}(a-t)\cdot 2t = -\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4} \leqq \frac{a^2}{4}$$

(ii) $a < t \leqq 1$ のとき

$$\triangle\mathrm{PQC} = \frac{1}{2}(t-a)2t = t(t-a) \leqq 1(1-a) = 1-a$$





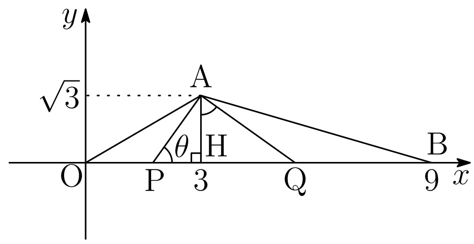
したがって　$S=\max\left(\dfrac{a^2}{4},\ 1-a\right)$

ここで　　$\dfrac{a^2}{4}-(1-a) = \dfrac{1}{4}(a^2+4a-4)$

$$= \frac{1}{4}(a+2+2\sqrt{2})(a+2-2\sqrt{2})$$

よって　$\boldsymbol{S = \begin{cases} 1-a & (0 \leqq a \leqq 2\sqrt{2}-2) \\ \dfrac{a^2}{4} & (2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 1) \end{cases}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) H(3, 0) をとると，$\angle\mathrm{HAQ} = \theta$



$$(*)\begin{cases} \mathrm{PH} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\tan\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta} \\ \mathrm{HQ} = \mathrm{AH}\tan\theta = \sqrt{3}\tan\theta \end{cases}$$

よって $$S = \frac{1}{2}(\mathrm{PH}+\mathrm{HQ})\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta} + \sqrt{3}\tan\theta\right)\sqrt{3}$$
$$= \frac{3}{2\sin\theta\cos\theta} = \boldsymbol{\frac{3}{\sin 2\theta}}$$

(2) (1) の結果から　$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最小値 $\mathbf{3}$ をとる．

このとき　$\mathrm{PH} = \mathrm{HQ} = \mathrm{AH}$　ゆえに　$\mathbf{P(3-\sqrt{3},\ 0)}$，$\mathbf{Q(3+\sqrt{3},\ 0)}$

(3) $\triangle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$

$S = \dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{AOB}$ より　$\dfrac{3}{\sin 2\theta} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$　ゆえに　$\sin 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\quad 整理すると\quad \tan^2\theta - 2\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$$

これを解くと　$\tan\theta = \sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

ここで，$\theta > \angle\mathrm{AOH}$ であるから　$\tan\theta > \tan\angle\mathrm{AOH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

したがって　$\tan\theta = \sqrt{3}+\sqrt{2}$　これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{PH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 3-\sqrt{6},\quad \mathrm{HQ} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3+\sqrt{6}$$

2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ，p，q とすると

$$\mathrm{PH} = 3-p = 3-\sqrt{6},\quad \mathrm{HQ} = q-3 = 3+\sqrt{6}$$

したがって　$p = \sqrt{6}$，$q = 6+\sqrt{6}$

このとき，2 点 P，Q が線分 OB 上にあることに注意して

$$\mathbf{P(\sqrt{6},\ 0)},\quad \mathbf{Q(6+\sqrt{6},\ 0)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$a^3 - a = (a-1)a(a+1)$$

$a^3 - a$ は連続する3つの整数 $a-1,\ a,\ a+1$ を因数にもつ．この中に必ず3の倍数がある．したがって，$a^3 - a$ は3の倍数である．

(2) $$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \quad \cdots (*)$$

$a-b$ が3の倍数ならば，$(a-b)^3$ は27の倍数，$3ab(a-b)$ は9の倍数である．したがって，$a-b$ が3の倍数ならば，$a^3 - b^3$ は9の倍数である．

(3) (i) $a - b \equiv \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - b^3 \equiv \pm 1$ (複号同順) $\pmod 3$

(ii) $a - b \equiv 0 \pmod 3$，すなわち，$a - b = 3k$(k は整数) のとき

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= (3k)^3 + 3ab(3k) = 9k(3k^2 + ab) \end{aligned}$$

このとき，$a^3 - b^3$ は9の倍数である．

(i)，(ii) より，$a^3 - b^3$ は3の倍数ならば9の倍数である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 総得点が最大となるのは，4, 5, 6 が 1 回ずつ出る場合で，その最大値は

$$4+5+6=\mathbf{15}$$

総得点が最小となるのは，3 回とも 1 が出るときで，その最小値は

$$1+0+0=\mathbf{1}$$

よって　$p_{15}=3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$，　$p_1=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{216}}$

(2) 1 回から 3 回までに出た目をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，1 回から 3 回の得点をそれぞれ $x_1,\ x_2,\ x_3$ とする．$x_1+x_2+x_3=6$ となる場合について，次の (i)〜(iv) の場合に分けてその確率を求める．

(i) $\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ のとき，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(a,\ b,\ c)$

$$3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$$

(ii) $\{a,\ b\}=\{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\},\ c\in\{a,\ b\}$ のとき，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(a,\ b,\ 0)$

$$2!\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{2}{6}\times 2=\frac{8}{216}$$

(iii) $\{a,\ c\}=\{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\},\ b=a$ のとき，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(a,\ 0,\ c)$

$$2!\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 2=\frac{4}{216}$$

(iv) $a=b=c=6$ のとき，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(6,\ 0,\ 0)$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(i)〜(iv) より　$p_6=\dfrac{6+8+4+1}{216}=\dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{216}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 の交点を M とすると，M は線分 A_1A_3 の中点で，$\angle OMA_1 = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

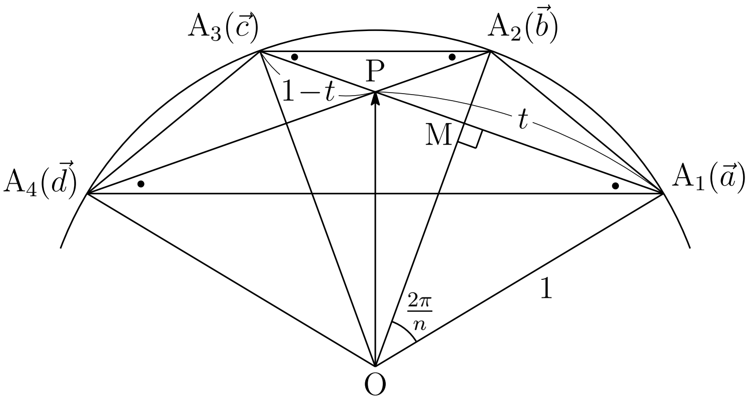
$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA_1}\cos\frac{2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}k$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{OM}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2}k\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

上の 2 式から　$\dfrac{1}{2}k\vec{b} = \dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$　ゆえに　$\boldsymbol{\vec{a} = k\vec{b} - \vec{c}}$

$A_2(\vec{b})$ と $A_3(\vec{c})$，$A_1(\vec{a})$ と $A_4(\vec{d})$ の対称性により ($\vec{b}$ と $\vec{c}$ の交換)

$$\boldsymbol{\vec{d} = k\vec{c} - \vec{b}}$$



(2) 点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\vec{a} + t\vec{c} = (1-t)(k\vec{b}-\vec{c}) + t\vec{c}\\ &= (1-t)k\vec{b} + (2t-1)\vec{c} \quad \cdots①\end{aligned}$$

点 P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分したもので，対称性により

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)k\vec{c} + (2t-1)\vec{b} \quad \cdots②$$

①，② より　$(1-t)k = 2t-1$　ゆえに　$\boldsymbol{t = \dfrac{k+1}{k+2}}$

$n \geqq 4$ より，$0 < \dfrac{2\pi}{n} \leqq \dfrac{\pi}{2}$　$k = 2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ より　$0 \leqq k < 2$

$t = 1 - \dfrac{1}{k+2}$ であるから　　$\dfrac{1}{2} \leqq t < \dfrac{3}{4}$

(3) $\triangle \mathrm{PA_2A_3} \backsim \triangle \mathrm{PA_4A_1}$ で $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{PA_4A_1}} = \dfrac{(1-t)^2}{t^2}$ また $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_4A_1}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} = t$

したがって $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} = \dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{PA_4A_1}} \cdot \dfrac{\triangle \mathrm{PA_4A_1}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} = \dfrac{(1-t)^2}{t}$

$f(t) = \dfrac{(1-t)^2}{t}$ とおくと，$f(t) = \dfrac{1}{t} - 2 + t$ より $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t < \dfrac{3}{4}\right)$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} < 0$$

$f(t)$ は単調減少より，$f(t) > f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{12}$ よって $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} > \dfrac{1}{12}$

別解 $t = \dfrac{k+1}{k+2}$ であるから $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$0 < k < 2$ より $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} > \dfrac{1}{12}$

発展 $\mathrm{A_1}(k\vec{b} - \vec{c})$，$\mathrm{A_2}(\vec{b})$，$\mathrm{A_3}(\vec{c})$，$\mathrm{A_4}(k\vec{c} - \vec{b})$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{k}{k+2}(\vec{b} + \vec{c})\right)$ を空間のベクトルとして考え (z 成分を 0 とする)，ベクトル積 (外積) を利用すると[1]

$$\triangle \mathrm{PA_2A_3} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PA_2}} \times \overrightarrow{\mathrm{PA_3}}|, \quad \triangle \mathrm{A_1A_2A_4} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}|$$

外積の演算，$\vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$，$\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$，$\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{PA_2}} \times \overrightarrow{\mathrm{PA_3}} = \frac{2\vec{b} - k\vec{c}}{k+2} \times \frac{-k\vec{b} + 2\vec{c}}{k+2} = \frac{4-k^2}{(k+2)^2}\vec{b} \times \vec{c} = \frac{2-k}{k+2}\vec{b} \times \vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}} = \{(1-k)\vec{b} + \vec{c}\} \times (k+1)(-\vec{b} + \vec{c}) = (k+1)(2-k)\vec{b} \times \vec{c}$$

$0 \leqq k < 2$ に注意して

$$\triangle \mathrm{PA_2A_3} = \frac{2-k}{2(k+2)}|\vec{b} \times \vec{c}|, \quad \triangle \mathrm{A_1A_2A_4} = \frac{1}{2}(k+1)(2-k)|\vec{b} \times \vec{c}|$$

したがって $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} > \dfrac{1}{12}$

また，$|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-k^2}$

注意 ベクトル積 (外積) は，高校数学の範囲外であるが，マーク試験など答えだけを解答する試験では，有効な計算法である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b = f'(t)(a - t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(a - t) - b = 0$$

$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(a - t) - b$ とおくと　$\varphi(t) = -2t^3 + 3a(t^2 - 1) - b$

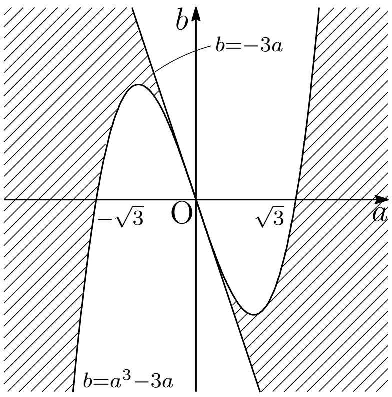
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + f''(t)(a - t) + f'(t)\cdot(-1) \\ &= f''(t)(a - t) = 6t(a - t) \end{aligned}$$

$\varphi'(t) = 0$ を解くと　$t = 0,\ a$

このとき，3 次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数であるから

$$\begin{aligned} \varphi(0)\varphi(a) &= (-3a - b)(a^3 - 3a - b) \\ &= (3a + b)(-a^3 + 3a + b) < 0 \end{aligned}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線は含まない．



(2) (1) の結果から，$n \leqq 2$ および $-3a < b$ を同時に満たす不等式は

$$(3a + b)(-a^3 + 3a + b) \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad -3a < b$$

$k = b - 3a$ とおくと　$b = 3a + k$

k が最小となるときの a の値は

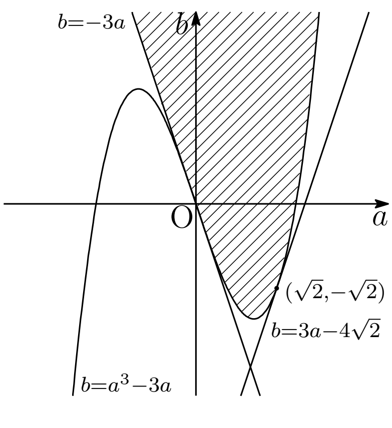
$$f'(a) = 3a^2 - 3 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm\sqrt{2}$$

$a > 0$ に注意して　$a = \sqrt{2}$

$$b = f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

よって，求める最小値は

$$k = b - 3a = -\sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{2} = \boldsymbol{-4\sqrt{2}}$$



解説 3次曲線 $C: y=f(x)$ の変曲点の x 座標を a とすると　$f''(a)=0$

点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

とくに，C の変曲点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

ℓ_t が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ を通るとき

$$q=f'(t)(p-t)+f(t)\quad \text{ゆえに}\quad f(t)+f'(t)(p-t)-q=0$$

$\varphi(t)=f(t)+f'(t)(p-t)-q$ とおくと，3次方程式 $\varphi(t)=0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線の本数である．

$$\varphi'(t)=f'(t)+f''(t)(p-t)+f'(t)\cdot(-1)=f''(t)(p-t)$$

$\varphi'(t)=0$ の解は　$t=p,\ a$

$$\varphi(p)=f(p)-q,\quad \varphi(a)=f(a)+f'(a)(p-a)-q=g(p)-q$$

(i) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が3本のとき ($\varphi(t)=0$ の解が3個)

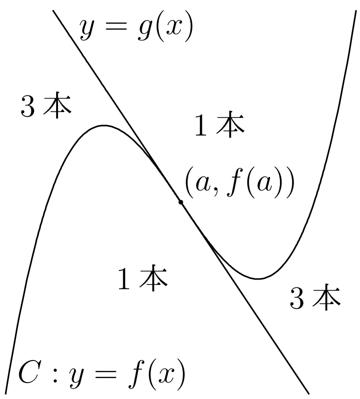
$$\varphi(p)\varphi(a)=(f(p)-q)(g(p)-q)<0$$

(ii) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が2本のとき ($\varphi(t)=0$ の解が2個)

$$\varphi(p)\varphi(a)=(f(p)-q)(g(p)-q)=0\quad (p\neq a)$$

(iii) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が1本のとき ($\varphi(t)=0$ の解が1個)

$$\varphi(p)\varphi(a)=(f(p)-q)(g(p)-q)>0\quad \text{または}\quad (p,\ q)=(a,\ f(a))$$



$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 参照

(2) $\boxed{\mathbf{4}}$ (2) 参照

(3) 1 回から 3 回までに出た目をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，1 回から 3 回の得点をそれぞれ $x_1,\ x_2,\ x_3$ とする．$x_1+x_2+x_3=n$ となるとき

$$\text{(i)}\ \ x_2\neq 0,\ x_3\neq 0 \qquad \text{(ii)}\ \ x_2\neq 0,\ x_3=0$$
$$\text{(iii)}\ \ x_2=0,\ x_3\neq 0 \qquad \text{(iv)}\ \ x_2=0,\ x_3=0$$

の場合に分けてその確率を求める．

(i) 互いに異なる $a,\ b,\ c$ について，$x_1+x_2+x_3=n$ $(6\leqq n\leqq 15)$ となる確率を A とすると　$A=3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{36}$

$n=6$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 2,\ 3\}$
$n=7$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 2,\ 4\}$
$n=8$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4\}$
$n=9$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$
$n=10$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\}$
$n=11$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 4,\ 6\},\ \{2,\ 3,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 5\}$
$n=12$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 5\}$
$n=13$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{2,\ 5,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 6\}$
$n=14$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{3,\ 5,\ 6\}$
$n=15$ のとき　$\{a,\ b,\ c\}=\{4,\ 5,\ 6\}$

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
確率	A	A	$2A$	$3A$	$3A$	$3A$	$3A$	$2A$	A	A

(ii) $a\neq b$，$c\in\{a,\ b\}$ について，$x_1+x_2+x_3=n$ $(3\leqq n\leqq 11)$ となる確率を B とすると　$B=2!\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{54}$

$n=3$ のとき　$\{a,\ b\}=\{1,\ 2\}$
$n=4$ のとき　$\{a,\ b\}=\{1,\ 3\}$
$n=5$ のとき　$\{a,\ b\}=\{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\}$
$n=6$ のとき　$\{a,\ b\}=\{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\}$
$n=7$ のとき　$\{a,\ b\}=\{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\}$
$n=8$ のとき　$\{a,\ b\}=\{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\}$
$n=9$ のとき　$\{a,\ b\}=\{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\}$
$n=10$ のとき　$\{a,\ b\}=\{4,\ 6\}$
$n=11$ のとき　$\{a,\ b\}=\{5,\ 6\}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
確率	B	B	$2B$	$2B$	$3B$	$2B$	$2B$	B	B

(iii) $a \neq c$, $b = a$ について，$x_1 + x_2 + x_3 = n$ $(3 \leqq n \leqq 11)$ となる確率を C とすると　$C = 2!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{108}$

$\{a,\ c\}$ の組合せは，(ii) の $\{a,\ b\}$ と同一であるから

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
確率	C	C	$2C$	$2C$	$3C$	$2C$	$2C$	C	C

(iv) $a = b = c$ について，$x_1 + x_2 + x_3 = n$ $(1 \leqq n \leqq 6)$ となる確率を D とすると　$D = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{216}$

n	1	2	3	4	5	6
確率	D	D	D	D	D	D

(i)〜(iv) より

$$p_1 = D \qquad p_9 = 3A + 2(B+C)$$
$$p_2 = D \qquad p_{10} = 3A + (B+C)$$
$$p_3 = (B+C) + D \qquad p_{11} = 3A + (B+C)$$
$$p_4 = (B+C) + D \qquad p_{12} = 3A$$
$$p_5 = 2(B+C) + D \qquad p_{13} = 2A$$
$$p_6 = A + 2(B+C) + D \qquad p_{14} = A$$
$$p_7 = A + 3(B+C) \qquad p_{15} = A$$
$$p_8 = 2A + 2(B+C)$$

したがって　$p_1 = p_2 < p_3 = p_4 < p_5 < p_6$,
$p_7 - p_6 = (B+C) - D > 0$,
$p_8 - p_7 = A - (B+C) > 0$,
$p_8 < p_9 > p_{10} = p_{11} > p_{12} > p_{13} > p_{14} = p_{15}$

よって　$\boldsymbol{n = 9}$

$$\begin{aligned} p_9 &= 3A + 2(B+C) \\ &= 3 \times \frac{1}{36} + 2\left(\frac{1}{54} + \frac{1}{108}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{36}} \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$，$\mathrm{PQ}^2=2^2$ より

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)=2^2 \quad ゆえに \quad (q-p)^2\{1+(p+q)^2\}=4$$

$p<q$，$p+q=\sqrt{t}\cdots$① より

$$(q-p)\sqrt{1+t}=2 \quad ゆえに \quad q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}} \qquad \cdots ②$$

①，② より　$\boldsymbol{p=\dfrac{\sqrt{t}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t}},\quad q=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ p^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q,\ q^2)$ であるから

$$S=\frac{1}{2}|pq^2-p^2q|=\frac{1}{2}|pq(q-p)|$$

(1) の結果より，$pq=\dfrac{t}{4}-\dfrac{1}{1+t}$，$q-p=\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\right)\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|=\boldsymbol{\frac{|t^2+t-4|}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}}$$

(3) $S=1$ のとき，(2) の結果から

$$\frac{|t^2+t-4|}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}=1 \quad ゆえに \quad (t^2+t-4)^2=3(1+t)^3$$

整理すると　　$t(t^3-14t^2-55t-56)=0 \quad \cdots(*)$

$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(3t+5)(t-11)$$

$f(0)=-56$，$t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	$\searrow$		$\nearrow$

したがって，$t\geqq 0$ における $f(t)=0$ の解の個数は 1 個である．

$t\geqq 0$ における $(*)$ の解の個数，すなわち，$S=1$ となる t の個数は　**2 個**

$\boxed{\textbf{9}}$ (1) $(*)$ $w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ より

$$w(2z+i)=z+2i \quad \text{ゆえに} \quad (2w-1)z=(2-w)i$$

条件より，$|z|=1$ であるから

$$|2w-1||z|=|2-w||i| \quad \text{ゆえに} \quad |2w-1|=|2-w|$$

$|2w-1|^2=|w-2|^2$ であるから

$$(2w-1)(2\overline{w}-1)=(w-2)(\overline{w}-2) \quad \text{整理すると} \quad w\overline{w}=1$$

したがって　$|w|^2=1$　すなわち　$|w|=1$

よって，点 w は，原点を中心とする半径 1 の円周上を動く．

(2) $|w|=r$ であるとき，$(*)$ より

$$\left|\frac{z+2i}{2z+i}\right|=r \quad \text{ゆえに} \quad |z+2i|^2=r^2|2z+i|^2$$

$r^2(2z+i)(2\overline{z}-i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)$ であるから

$$(4r^2-1)z\overline{z}-2(r^2-1)iz+2(r^2-1)i\overline{z}=4-r^2 \qquad \text{(A)}$$

$4r^2-1=0$　すなわち　$r=\dfrac{1}{2}$ のとき，上式は，直線を表すので　$r\neq\dfrac{1}{2}$

$$z\overline{z}-\frac{2(r^2-1)i}{4r^2-1}z+\frac{2(r^2-1)i}{4r^2-1}\overline{z}=\frac{4-r^2}{4r^2-1}$$

$$\left|z+\frac{2(r^2-1)i}{4r^2-1}\right|^2=\frac{4-r^2}{4r^2-1}+4\left(\frac{r^2-1}{4r^2-1}\right)^2$$

$$\left|z+\frac{2(r^2-1)i}{4r^2-1}\right|=\frac{3r}{|4r^2-1|}$$

これが点 α を中心とし半径 1 の円周上を動くから

$$(**) \quad \alpha=-\frac{2(r^2-1)i}{4r^2-1}, \quad \frac{3r}{|4r^2-1|}=1$$

$$(4r^2-1)^2-(3r)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (4r^2+3r-1)(4r^2-3r-1)=0$$

$(r+1)(4r-1)(r-1)(4r+1)=0$　$r>0,\ r\neq\dfrac{1}{2}$ により　$r=1,\ \dfrac{1}{4}$

$(**)$ より　$\boldsymbol{(r,\ \alpha)=(1,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{5}{2}i\right)}$

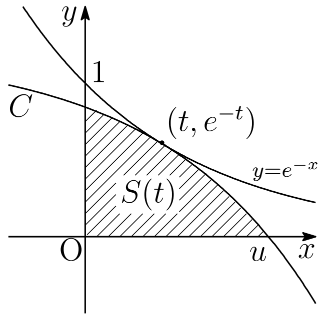
補足 $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ より，(A) において，$4r^2-1=0$ のとき

$$4(r^2-1)\mathrm{Im}(z)=4-r^2 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{Im}(z)=-\frac{5}{4}$$

これは，実軸に平行な直線を表す．

(2) の結果の $(r,\alpha)=(1,\ 0)$ は，(1) の結果を示している．

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $y=-e^x$ を平行移動した C の方程式を



$$y=-e^{x-p}+q$$

とし，$f(x)=e^{-x}$，$g(x)=-e^{x-p}+q$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x}, \quad g'(x)=-e^{x-p}$$

$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$e^{-t}=-e^{t-p}+q, \quad -e^{-t}=-e^{t-p}$$

上の第 2 式から　$p=2t$　これを第 1 式に代入して　$q=2e^{-t}$

よって，C の方程式は　$\boldsymbol{y=-e^{x-2t}+2e^{-t}}$

(2) C と x 軸との共有点の x 座標を u とすると

$$-e^{u-2t}+2e^{-t}=0 \quad \text{ゆえに} \quad e^u=2e^t,\ u=t+\log 2$$

よって
$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^u(-e^{x-2t}+2e^{-t})dx=\Big[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\Big]_0^u\\&=-e^ue^{-2t}+2e^{-t}u+e^{-2t}\\&=-2e^te^{-2t}+2e^{-t}(t+\log 2)+e^{-2t}\\&=\boldsymbol{2e^{-t}(-1+t+\log 2)+e^{-2t}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から
$$\begin{aligned}S'(t)&=2e^{-t}(2-t-\log 2)-2e^{-2t}\\&=2e^{-t}(2-t-\log 2-e^{-t})\end{aligned}$$

$h(t)=2-t-\log 2-e^{-t}$ とおくと

$$h(0)=1-\log 2>0, \quad \lim_{t\to\infty}h(t)=-\infty$$
$$h'(t)=e^{-t}-1<0 \quad (t>0)$$

$h(t)$ は単調減少で，$h(\alpha)=0$ を満たす $\alpha>0$ が唯一存在する．

$S'(t)=2e^{-t}h(t)$ より，$S(t)$ の増減表は右の表のようになる．

よって，$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在する．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots(*)$

これに順次 $n = 1, 2, 3, 4$ を代入すると

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a_1}} = 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 3$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}\right)} = 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)} = 7$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3}\right)} = 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}\right)} = 43$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \dfrac{1}{a_4}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{43}\right)} = \mathbf{1807} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ より，$n > 1$ のとき

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}, \quad \frac{1}{a_n - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = -\frac{1}{a_n}$$

ゆえに $\qquad \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_n(a_n - 1)}$

したがって $\quad a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \quad$ すなわち $\quad a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\qquad \boldsymbol{a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1}$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \quad \cdots ①$

$(a_n - 1)^2 \geqq 0$ より，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

$a_1 = 2$ より，$a_n \geqq 2$ であるから，① より

$$a_{n+1} - a_n \geqq (2-1)^2 = 1$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \geqq \sum_{k=1}^{n-1}$　ゆえに　$a_n - a_1 \geqq n - 1$

したがって　$a_n \geqq n + 1$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$(*)$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}-1}\right) = \mathbf{1}\end{aligned}$$

解説 本題の数列は，シルベスター数列 (Sylvester's sequence)

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_0 a_1 \cdots a_n + 1$$

である[2]．順次，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を代入すると

1, 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, 10650056950807,
113423713055421844361000443,
12864938683278671740537145998360961546653259485195807, $\cdots$

漸化式は，$a_n - 1 = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ により

$$a_{n+1} = (a_n - 1)a_n + 1 = {a_n}^2 - a_n + 1$$

となり，漸化式が一致する．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\text{(A)} \quad 2^{2^{n-2}} < a_n < 2^{2^{n-1}}$$

実際，$n = 2$ のとき成立．$(2^{2^{n-2}})^2 \geqq (a_n - 1)^2$, ${a_n}^2 < (2^{2^{n-1}})^2$ より

$$\begin{aligned}&2^{2^{n-1}} \leqq {a_n}^2 - a_n + 1 - a_n < a_{n+1}, \\ &a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1 < {a_n}^2 - a_n + 1 + (a_n - 1) = {a_n}^2 < 2^{2^n}\end{aligned}$$

よって　$2^{2^{n-1}} < a_{n+1} < 2^{2^n}$　$n \geqq 2$ について，(A) は成立する．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2001.pdf $\boxed{3}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 参照

(2) $\boxed{\mathbf{10}}$ (2) 参照

(3) $\boxed{\mathbf{10}}$ (3) 参照

(4) $\beta = \log \dfrac{12}{5}$ とおくと　$e^{-\beta} = \dfrac{5}{12}$

$S'(t) = 2e^{-t}(2 - t - \log 2 - e^{-t}) \cdots (*)$ より

$$\begin{aligned} S'(\beta) &= 2e^{-\beta}(2 - \beta - \log 2 - e^{-\beta}) \\ &= 2\cdot\frac{5}{12}\left(2 - \log\frac{12}{5} - \log 2 - \frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{19}{12} - \log\frac{24}{5}\right) \\ &> \frac{5}{6}\left(\frac{19}{12} - 1.57\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{7}{12} - 0.57\right) = \frac{5}{6} \times \frac{7 - 6.84}{12} > 0 \end{aligned}$$

(3) の増減表より　$\beta < \alpha$　よって　$\alpha > \log \dfrac{12}{5}$

$S(t) = 2e^{-t}(-1 + t + \log 2) + e^{-2t}$ および $(*)$ より

$$S(t) + S'(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

上式に $t = \alpha$ を代入すると，$S'(\alpha) = 0$ より

$$S(\alpha) = 2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha} = 1 - (1 - e^{-\alpha})^2$$

$\alpha > \log \dfrac{12}{5}$ より　$e^{-\alpha} < \dfrac{5}{12}$　ゆえに　$1 - e^{-\alpha} > \dfrac{7}{12}$

よって　$S(\alpha) = 1 - (1 - e^{-\alpha})^2 < 1 - \left(\dfrac{7}{12}\right)^2 = \dfrac{95}{144}$