平成28年度　千葉大学　2次試験前期日程(数学問題)

- 教育学部(中学数学を除く) $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90分) 数I・A
- 国際教養・文(行動科学)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム(物理化学・生命科学・人間科学) $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90分) 数I・II・A・B
- 教育(中学数学) $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ (150分) 数I・II・A・B
- 理(物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・先進科学プログラム(物理・工学) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ (120分) 数I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (120分) 数I・II・III・A・B
- 理学部(数学・情報数理) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (180分) 数I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1個のさいころを2回投げ，最初に出た目を a，2回目に出た目を b とする．2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ．

(2) 実数解の個数が1となる確率を求めよ．

(3) 実数解の個数が2となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上に5点O$(0,\ 0)$，A$(5,\ 0)$，B$(0,\ 11)$，P$(m,\ 0)$，Q$(0,\ n)$ をとる．ただし，m と n は $1 \leqq m \leqq 5$，$1 \leqq n \leqq 11$ を満たす整数とする．

(1) 三角形OABの内部に含まれる格子点の個数を求めよ．ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことであり，内部には辺の点は含まれない．

(2) 三角形OPQの内部に含まれる格子点の個数が三角形OABの内部に含まれる格子点の個数の半分になるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上に5点A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$，E$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ がある．点Eと点$\mathrm{P}_1(s,\ 1)$ $(0 < s < 1)$ を通る直線を ℓ_1 とする．直線 $y = 1$ に関して ℓ_1 と対称な直線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と直線 $x = 1$ の交点をP_2とする．さらに，直線 $x = 1$ に関して ℓ_2 と対称な直線 ℓ_3 は x 軸と線分AD上で交わるとし，その交点をP_3とする．

(1) 直線 ℓ_2 が点Dを通るときの s の値を求めよ．

(2) 線分DP_3の長さを s を用いて表せ．

(3) $\mathrm{EP}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ．

4 $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で，点 P は放物線 $y=-x^2+2$ 上を動き，点 Q は放物線 $y=x^2-2$ 上を動く．ただし，P と Q は異なる点とする．

(1) 直線 PQ が原点を通るとき，線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ．

(2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ．

5 座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 ABCD がある．原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく．k は $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす定数とする．0 以上の実数 $s,\ t,\ u$ が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定めれる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする．

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ．

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ．

(3) 対角線 AC，BD の交点を M とする．どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える．このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC，AM の長さを用いて答えよ．

6 a は $0<a<2$ を満たす定数とする．$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える．このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ．

7 数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する．Q が $x=a$ にあるとき，

- 出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる．
- 出た目が 2，3 ならば $x=a+1$ へ動く．
- 出た目が 4，5，6 ならば $x=0$ に戻る ($a=0$ ならば動かない)．

(1) 整数 $a \geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ．

(2) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ．

(3) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ において，不等式 $\log x < x$ を示せ．

(2) $1 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ．

(3) $x \geqq e$ において，不等式

$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

を示せ．ただし，e は自然対数の底である．

$\boxed{\mathbf{9}}$ $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく．

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ．

(2) $a = z + z^2 + z^4$ とするとき，$\alpha + \overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 2 点 O(0, 0)，A(0, 2) を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く．点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする．点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする．点 P の軌跡を C とする．

(1) C の方程式を求めよ．

(2) 正の実数 a に対して，C と x 軸と 2 直線 $x = a$，$x = -a$ によって囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 曲線 $C : y = \sin x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が動く．正の実数 r に対して，P における C の接線上に $\mathrm{PQ} = r$ となるように点 Q をとる．ただし，Q の x 座標は t よりも大きいとする．

(1) Q の座標を求めよ．

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は

$$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$$

を満たすとする．

(1) 互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で

$$m+n\sqrt{p}=\frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ．

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする．x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a > 0, \quad \alpha\beta = b > 0$$

よって，解 $\alpha,\ \beta$ が実数であれは，ともに正である．

(2) 2 次方程式の実数解の個数が 1 個であるとき，係数について

$$a^2 - 4b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{a^2}{4}$$

これを満たす $(a,\ b)$ の組は．$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$ の 2 組である．

よって，求める確率は $\quad \dfrac{2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(3) 2 次方程式の実数解の個数が 2 個であるとき，係数について

$$a^2 - 4b > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b < \frac{a^2}{4}$$

これを満たす $(a,\ b)$ の組は，次の 17 組である．

$$\begin{array}{ll} a = 3 \text{ のとき} & b = 1,\ 2 \\ a = 4 \text{ のとき} & b = 1,\ 2,\ 3 \\ a = 5,\ 6 \text{ のとき} & b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \end{array}$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{17}{6^2} = \mathbf{\dfrac{17}{36}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C(5, 11) をとると，四角形 OACB の内部にある格子点の個数は

$$(5-1)(11-1)=40$$

両端を除く線分 AB 上には格子点はない.

よって，△OAB の内部の格子点の個数は $\dfrac{40}{2}=\mathbf{20}$ (個)

(2) 点 R$(m,\ n)$ をとると，四角形 OPRQ の内部に含まれる格子点の個数は

$$(m-1)(n-1)$$

両端を除く線分 PQ 上にある格子点の個数を $L(m,\ n)$ とすると，△OPQ の内部にある格子点の個数が (1) の半分であるから

$$\frac{(m-1)(n-1)-L(m,\ n)}{2}=\frac{1}{2}\times 20$$

したがって $\begin{cases} (m-1)(n-1)-L(m,\ n)=20 & \cdots(*) \\ 0 \leqq L(m,\ n) \leqq m-1 & \cdots(**) \end{cases}$

$m=1$ のとき，$(*)$ は成立しないので，$m \neq 1$ より

$$n=1+\frac{20}{m-1}+\frac{L(m,\ n)}{m-1}$$

(i) $m=2$ のとき，$n=21+L(2,\ n) \geqq 21$，不適.

(ii) $m=3$ のとき　$n=11+\dfrac{(3,\ n)}{2} \geqq 11$

$n=11$ のとき，$L(3,\ 11)=0$ であるから，$(m,\ n)=(3,\ 11)$ は適する.

(iii) $m=4$ のとき　$n=7+\dfrac{2+L(4,\ n)}{3}$

$(**)$ より，$\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{2+L(4,\ n)}{3} \leqq \dfrac{5}{3}$ であるから　$n=8$

このとき，$L(4,\ 8)=3$ であるから，不適.

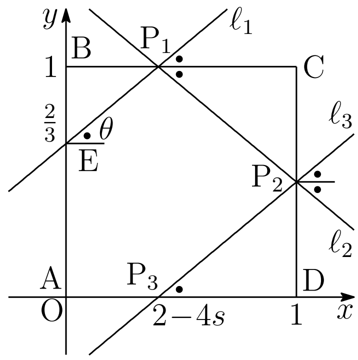
(iv) $m=5$ のとき　$n=6+\dfrac{L(5,\ n)}{4}$

$(**)$ より，$0 \leqq \dfrac{L(5,\ n)}{4} \leqq 1$ であるから　$n=6,\ 7$

$L(5,\ 6)=0$，$L(5,\ 7)=0$ であるから，適するのは　$(m,\ n)=(5,\ 6)$

(i)〜(iv) より　$\boldsymbol{(m,\ n)=(3,\ 11),\ (5,\ 6)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2点$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\mathrm{P}_1(s,\ 1)$を通る直線$\ell_1$は



$$y=\frac{1}{3s}x+\frac{2}{3}$$

点$\mathrm{P}_1(s,\ 1)$を通り，傾き$-\dfrac{1}{3s}$の直線ℓ_2は

$$y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

直線ℓ_2と直線$x=1$との交点のy座標は

$$y=-\frac{1}{3s}+\frac{4}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{P}_2\left(1,-\frac{1}{3s}+\frac{4}{3}\right)$$

ℓ_2が点Dを通るとき，P_2のy座標は0であるから

$$-\frac{1}{3s}+\frac{4}{3}=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{s=\frac{1}{4}}$$

(2) 点$\mathrm{P}_2\left(1,-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}\right)$を通り，傾き$\dfrac{1}{3s}$の直線$\ell_3$は

$$y=\frac{1}{3s}x-\frac{2}{3s}+\frac{4}{3}$$

ℓ_3とx軸との交点のx座標は

$$\frac{1}{3s}x-\frac{2}{3s}+\frac{4}{3}=0\quad \text{これを解いて}\quad x=2-4s$$

したがって　$\mathrm{P}_3(2-4s,\ 0)$　よって　$\mathrm{DP}_3=1-(2-4s)=\boldsymbol{4s-1}$

(3) P_3は線分AD上にあるから　$0\leqq 2-4s\leqq 1$　ゆえに　$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}$

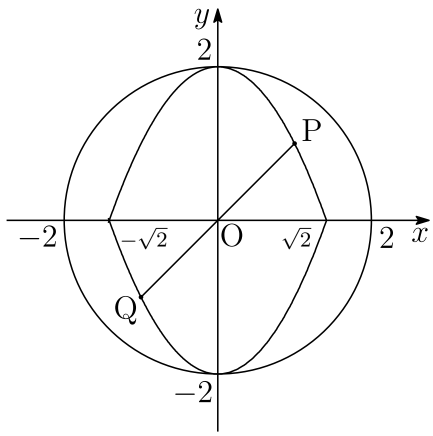
ℓ_1の偏角をθとすると　$\tan\theta=\dfrac{1}{3s}$，$\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\dfrac{1}{9s^2}}$

$$\mathrm{EP}_1=\frac{\mathrm{BP}_1}{\cos\theta},\quad \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\frac{\mathrm{P}_1\mathrm{C}}{\cos\theta},\quad \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\frac{\mathrm{DP}_3}{\cos\theta}$$

ゆえに　$\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\dfrac{(\mathrm{BP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{C})+\mathrm{DP}_3}{\cos\theta}=\dfrac{4s}{\cos\theta}=4\sqrt{s^2+\dfrac{1}{9}}$

よって　$s=\dfrac{1}{2}$のとき，最大値$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{13}}{3}}$，$s=\dfrac{1}{4}$のとき，最小値$\boldsymbol{\dfrac{5}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=-x^2+2$ と $y=x^2-2$ は原点に関して対称であるから，直線 PQ が原点を通るとき



$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OP}$$

$\mathrm{P}(t,-t^2+2)$ とすると $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$$\mathrm{OP}^2=t^2+(-t^2+2)^2=t^4-3t^2+4$$
$$=\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$0\leqq t^2\leqq 2$ より $\dfrac{7}{4}\leqq\mathrm{OP}^2\leqq 4$ ゆえに $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqq\mathrm{OP}\leqq 2$

したがって $\sqrt{7}\leqq\mathrm{PQ}\leqq 4$ よって，PQ は最大値 **4**，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$ をとる.

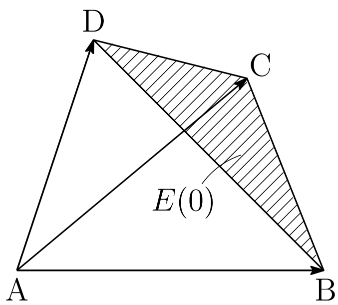
(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqq\mathrm{OP}\leqq 2$，$\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqq\mathrm{OQ}\leqq 2$ であるから，P，Q は原点を中心とする半径 2 の円の内部または周上にある．PQ が最大となるのは，PQ が直径の両端となる $\mathrm{P}(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,-2)$ のときである．よって，PQ の最大値は **4**

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $k=1$ を $k+s+t+u=1$ に代入すると $s+t+u=0$

$s,\ t,\ u$ は 0 以上であるから $s=t=u=0$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ よって $E(1)$ は**点 A** を表す.

$k=0$ を $k+s+t+u=1$ に代入すると



$$s+t+u=1$$

$k=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$s+t+u=1$ および $s,\ t,\ u$ は 0 以上であるから，$E(0)$ は，**△BCD の周およびその内部**である.

補足 BC を $t:s$ に内分する点を Q とすると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{t+s}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(s+t)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

したがって，点 P は線分 QD を $u:s+t$ に内分する点である.

(2) $k=\dfrac{1}{3}$ を $k+s+t+u=1$ に代入すると　$s+t+u=\dfrac{2}{3}$

$k=\dfrac{1}{3}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

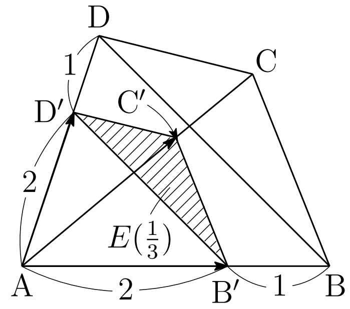
ここで，$s=\dfrac{2}{3}s'$，$t=\dfrac{2}{3}t'$，$u=\dfrac{2}{3}u'$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD'}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+u'\overrightarrow{\mathrm{AD'}}$$

$s'+t'+u'=1$ および s'，t'，u' は 0 以上であるから，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ は，**$\triangle\mathrm{B'C'D'}$ の周およびその内部である．**



(3) $k+s+t+u=1$ より　$s+t+u=1-k$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ここで，$s=(1-k)s_k$，$t=(1-k)t_k$，$u=(1-k)u_k$，

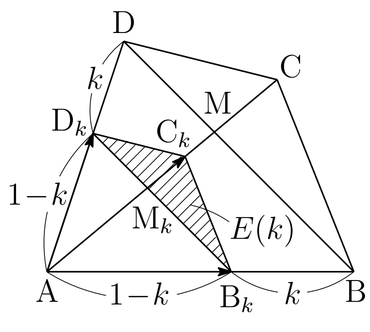
$\overrightarrow{\mathrm{AB}_k}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}_k}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}_k}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s_k\overrightarrow{\mathrm{AB}_k}+t_k\overrightarrow{\mathrm{AC}_k}+u_k\overrightarrow{\mathrm{AD}_k}$$

$s_k+t_k+u_k=1$ および s_k，t_k，u_k は 0 以上であるから，$E(k)$ は，$\triangle\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$ の周およびその内部である．

$\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\alpha=\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}$ とおくと

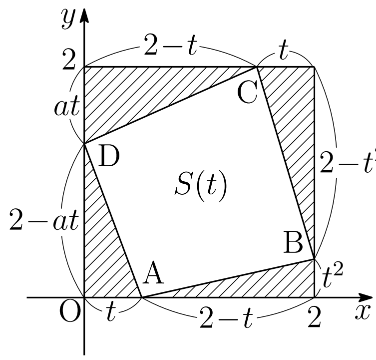
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}=(1-k)\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AM}_{\frac{1}{3}}}=\dfrac{2}{3}\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}_{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

条件を満たすとき　$\dfrac{2}{3}\alpha\leqq\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\alpha\leqq\dfrac{3}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{3}{4}}$

6 $0 < a < 2$，$0 \leqq t \leqq 1$ により，4 点 A$(t,\ 0)$，B$(2,\ t^2)$，C$(2-t,\ 2)$，D$(0,\ 2-at)$ は，O$(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする正方形の周上にあるから，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ は



$$\begin{aligned} S(t) &= 2^2 - \frac{1}{2}t(2-at) - \frac{1}{2}t^2(2-t) \\ &\qquad - \frac{1}{2}t(2-t^2) - \frac{1}{2}at(2-t) \\ &= t^3 + (a-1)t^2 - (a+2)t + 4 \end{aligned}$$

したがって　$S'(t) = 3t^2 + 2(a-1)t - (a+2)$

$$S'(0) = -(a+2) < 0, \quad S'(1) = a-1$$

$S'(t) = 0$ の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < 0 < \beta)$

$$\beta = \frac{1-a+\sqrt{a^2+a+7}}{3}$$

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$0 < t < 1$ において，$S'(t) < 0$ であるから，$S(t)$ は単調減少である．

したがって，$S(t)$ は $t = 1$ で最小．

(ii) $1 < a < 2$ のとき

$S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

したがって，$S(t)$ は $t = \beta$ で最小．

(i)，(ii) より　**$0 < a \leqq 1$ のとき　$t = 1$，**

$$\boldsymbol{1 < a < 2 \text{ のとき}\quad t = \frac{1-a+\sqrt{a^2+a+7}}{3}}$$

7 (1) n 回の試行後にさいころが $x = a$ にある確率を $P_n(a)$ とすると

$$P_{n+1}(0) = \frac{2}{3}P_n(0) + \frac{1}{2}\{1 - P_n(0)\}$$

上式から次の第 1 式および次の確率漸化式が成立する．

$$P_{n+1}(0) = \frac{1}{6}P_n(0) + \frac{1}{2} \qquad (*)$$

$$P_{n+1}(a+1) = \frac{1}{6}P_n(a+1) + \frac{1}{3}P_n(a) \qquad (**)$$

$$P_n(a) = 0 \quad (n < a)$$

$P_1(0)=\dfrac{2}{3}$，$P_1(1)=\dfrac{1}{3}$ であるから $n=1$ とき

$$\begin{aligned}
P_2(0)&=\frac{1}{6}P_1(0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{18}\\
P_2(1)&=\frac{1}{6}P_1(1)+\frac{1}{3}P_1(0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{18}\\
P_2(2)&=\frac{1}{6}P_1(2)+\frac{1}{3}P_1(1)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

上の結果から，$n=2$ のとき

$$\begin{aligned}
P_3(0)&=\frac{1}{6}P_2(0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{18}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{65}{108}}\\
P_3(1)&=\frac{1}{6}P_2(1)+\frac{1}{3}P_2(0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{18}+\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{18}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\\
P_3(2)&=\frac{1}{6}P_2(2)+\frac{1}{3}P_2(1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{18}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}\\
P_3(3)&=\frac{1}{6}P_2(3)+\frac{1}{3}P_2(3)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{27}}
\end{aligned}$$

(2) $a_n=P_n(0)$ とおくと　$a_1=\dfrac{2}{3}$，　$a_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{2}$

したがって　$a_{n+1}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{6}\left(a_n-\dfrac{3}{5}\right)$　ゆえに　$a_n-\dfrac{3}{5}=\left(a_1-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

よって，求める確率は　　$P_n(0)=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{15\cdot 6^{n-1}}}$

(3) $a=0$ を $(**)$ に代入すると

$$P_{n+1}(1)=\frac{1}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(0)$$

$b_n=P_n(1)$ とおくと，$b_1=\dfrac{1}{3}$　上式および (1) の結果から

$$b_{n+1}=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{5}+\frac{1}{45\cdot 6^{n-1}}\quad \text{ゆえに}\quad b_{n+1}-\frac{6}{25}=b_n-\frac{6}{25}+\frac{1}{45\cdot 6^{n-1}}$$

したがって　$6^{n+1}\left(b_{n+1}-\dfrac{6}{25}\right)=6^n\left(b_n-\dfrac{6}{25}\right)+\dfrac{4}{5}$

$$6^n\left(b_n-\frac{6}{25}\right)=6\left(b_1-\frac{6}{25}\right)+\frac{4}{5}(n-1)$$

よって，求める確率は　　$P_n(1)=\boldsymbol{\dfrac{6}{25}+\dfrac{20n-6}{25\cdot 6^n}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x) = x - \log x\ (x > 0)$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(x) \geqq 1 > 0$ より　$x - \log x > 0$　よって　$x > 0$ において $\log x < x$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{\log x}$ とおくと　$g'(x) = -\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

平均値の定理により

$$\frac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(c), \quad 1 < a < c < b$$

を満たす c が少なくとも1つ存在する．また

$$g'(c) = -\frac{1}{c(\log c)^2} > -\frac{1}{a(\log a)^2}$$

したがって　$\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{\log b} - \dfrac{1}{\log a}\right) > -\dfrac{1}{a(\log a)^2}$

よって　$\dfrac{1}{\log a} - \dfrac{1}{\log b} < \dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$

(3) $g(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} - \log(\log x) - \frac{1}{2(\log x)^2} + \frac{1}{2}$ とおくと $(x \geqq e)$

$$g'(x) = \frac{1}{x\log(x+1)} - \frac{1}{x\log x} + \frac{1}{x(\log x)^3}$$

ここで，(2) の結果に，$a = x$，$b = x+1$ を代入すると

$$\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log(x+1)} < \frac{1}{x(\log x)^2}$$
$$\frac{1}{x\log(x+1)} - \frac{1}{x\log x} > -\frac{1}{x^2(\log x)^2}$$

したがって　$g'(x) > -\dfrac{1}{x^2(\log x)^2} + \dfrac{1}{x(\log x)^3} = \dfrac{x - \log x}{x^2(\log x)^3} > 0$

$g(x)$ は単調増加で，$g(e) = 0$ であるから，$x \geqq e$ において　$g(x) \geqq 0$

よって　$\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2} \quad (x \geqq e)$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より　$z^7=1$

$$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z\neq 1$ より　$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

よって　　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\mathbf{-1}$

(2) $z\overline{z}=z^2\overline{z^2}=z^4\overline{z^4}=1$，$zz^6=z^2z^5=z^4z^3=1$ より

$$\overline{z}=z^6,\quad \overline{z^2}=z^5,\quad \overline{z^4}=z^3$$

(1) の結果から　$\alpha+\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)+(z^6+z^5+z^3)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\mathbf{-1}$

また，$z^7=1$ および (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\\&=3+(-1)=\mathbf{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(z+z^2+z^4)&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\\&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0\end{aligned}$$

α は方程式 $x^2+x+2=0$ の解であるから，$\mathrm{Im}(\alpha)>0$ に注意して

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}}$$

(3) $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^7-1=0$ の解は $1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6$ であるから

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

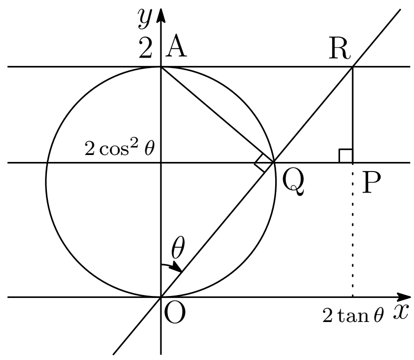
上の 2 式の因数により

$$\begin{aligned}&(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\\&\qquad\qquad=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\end{aligned}$$

これに $x=1$ を代入すると

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\mathbf{7}$$

10 (1) $\mathrm{P}(x,\ y)$，y 軸を始線として，$\theta = \angle\mathrm{AOR}$ とすると



$$x = \mathrm{AR} = 2\tan\theta,$$

$$\mathrm{OQ} = 2\cos\theta,$$

$$y = \mathrm{OQ}\cos\theta = 2\cos^2\theta$$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ より

$$2\cos^2\theta = \frac{8}{4+(2\tan\theta)^2} \quad よって \quad \boldsymbol{y = \frac{8}{4+x^2}}$$

(2) $y = \dfrac{8}{4+x^2}$，$x = 2\tan\theta$ $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$-a \longrightarrow a$
θ	$-\varphi \longrightarrow \varphi$

とすると，$y = \dfrac{8}{4+(2\tan\theta)^2} = 2\cos^2\theta$ より

$$\frac{V(a)}{\pi} = \int_{-a}^{a} y^2\,dx = \int_{-\varphi}^{\varphi} (2\cos^2\theta)^2 \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

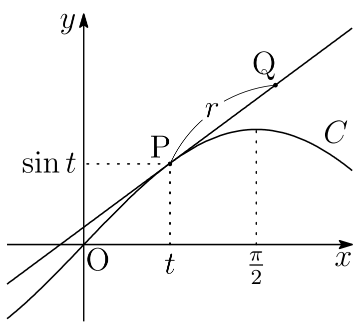
$$= \int_0^{\varphi} 16\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\varphi} (8\cos 2\theta + 8)\,d\theta$$

$$= \Big[\ 4\sin 2\theta + 8\theta\ \Big]_0^{\varphi} = 4\sin 2\varphi + 8\varphi$$

したがって $\qquad V(a) = \pi(4\sin 2\varphi + 8\varphi)$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\varphi = \frac{\pi}{2}$ であるから $\quad \displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a) = \pi\,(4\sin\pi + 4\pi) = \boldsymbol{4\pi^2}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $f(x)=\sin x$ とおくと　$f'(x)=\cos x$



C 上の点 P における接線の偏角を θ とすると

$$\tan\theta = f'(t) = \cos t$$

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = t + r\cos\theta, \quad y = \sin t + r\sin\theta$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}},$$
$$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

したがって　$x = t + \dfrac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \quad y = \sin t + \dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \quad \cdots (*)$

よって　　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{t} + \dfrac{\boldsymbol{r}}{\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}}},\ \mathbf{sin}\,\boldsymbol{t} + \dfrac{\boldsymbol{r}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{t}}{\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}}}\right)$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \cos t + r\cdot\frac{-\sin t\sqrt{1+\cos^2 t} - \cos t\cdot\dfrac{-\sin t\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}}{1+\cos^2 t} \\ &= \cos t + r\sin t\cdot\frac{-(1+\cos^2 t)+\cos^2 t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \cos t - \frac{r\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\cos t(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\sin t} - r\right\}\end{aligned}$$

$g(t) = \dfrac{\cos t(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\sin t}$ とおくと，$g(t)$ は，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少である．

よって，条件を満たす r は

$$r = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{6}}{4}}$$

$\boxed{\textbf{12}}$ (1) $(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ より　$m^2-n^2p-1=0$　$\cdots$①

$m+n\sqrt{p}=\dfrac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ より

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{p} &= (m+n\sqrt{p})(x-y\sqrt{p}) \\ &= mx-npy+(nx-my)\sqrt{p} \end{aligned}$$

$m,\ n,\ x,\ y,\ p$ は自然数であるから

$$\begin{cases} mx-npy=x \\ nx-my=y \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} (m-1)x=npy \\ nx=(m+1)y \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式および第 2 式から，それぞれ次式を得る．

$$\frac{y}{x}=\frac{m-1}{np},\quad \frac{y}{x}=\frac{n}{m+1}$$

① より　$(m-1)(m+1)=np{\cdot}n$　ゆえに　$\dfrac{m-1}{np}=\dfrac{n}{m+1}$

したがって　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{m-1}{np}=\dfrac{n}{m+1}$

2 数 $m+1,\ n$ の最大公約数を g とし

$$m+1=ga,\quad n=gb\quad (a,\ b\ \text{は互いに素}),$$

とすると，条件を満たす $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(a,\ b)$

(2) $(*)$ の第 1 式から

$$\begin{aligned} x\ \text{が}\ p\ \text{で割り切れない} &\implies m-1\ \text{が}\ p\ \text{で割り切れる} \\ &\implies m\ \text{を}\ p\ \text{で割った余りは}\ 1 \end{aligned}$$

逆に，$m\equiv 1 \pmod{p}$ のとき，$m+1\equiv 2 \pmod{p}$ より，$(*)$ の第 2 式から

$$nx\equiv 2y \pmod{p}$$

x が奇素数 p で割り切れると仮定すると，y も p で割り切れる．これは $x,\ y$ が互いに素であることに反する．ゆえに，x は奇素数 p で割り切れない．

よって，題意は証明された．