平成27年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・教育 (情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (物理化学・生命科学・人間科学) $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学) $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ (150 分) 数 I・II・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・先進科学プログラム (物理・工学) $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{11}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 医学部 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (180 分) 数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とする．x に関する方程式

$$|x^2 - 6x - |x - 6|| + x = a$$

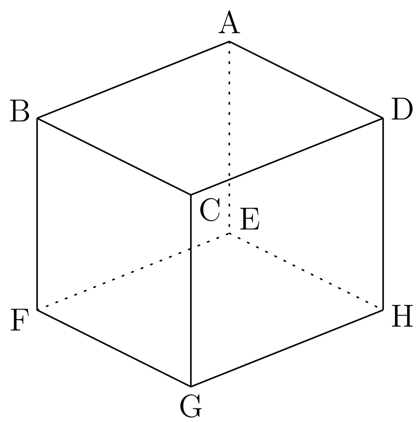
の実数解の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 下図のような 1 辺の長さが 4 の立方体 ABCD-EFGH がある．辺 AB 上に点 P を BP $= 3$ となるように取り，辺 BC 上に点 Q を取る．また，B から △PFQ へ垂線 BK を下ろす．BQ の長さを a として，以下の問いに答えよ．

(1) a を用いて △PFQ の面積を表せ．

(2) a を用いて BK の長さを表せ．

(3) BK の長さは $\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$ 以下であることを示せ．



$\boxed{\mathbf{3}}$ 1辺の長さ1の正三角形ABCにおいて，BCを1 : 2に内分する点をD，CAを1 : 2に内分する点をE，ABを1 : 2に内分する点をFとし，さらにBEとCFの交点をP，CFとADの交点をQ，ADとBEの交点をRとする．このとき，△PQRの面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ さいころを5回振るとき，初めの4回においては6の目が偶数回出て，しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ．ただし，6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす．

$\boxed{\mathbf{5}}$ mを実数とする．xに関する方程式

$$x^3 - 3x - |x - m| = 0$$

の実数解の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $k,\ m,\ n$を自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2^kを7で割った余りが4であるとする．このとき，kを3で割った余りは2であることを示せ．

(2) $4m + 5n$が3で割り切れるとする．このとき，2^{mn}を7で割った余りは4ではないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ bとcを$b^2 + 4c > 0$を満たす実数として，xに関する2次方程式$x^2 - bx - c = 0$の相異なる解を$\alpha,\ \beta$とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．このとき，つぎの問いに答えよ．

(1) 数列$\{a_n\}$は漸化式

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすことを示せ．

(2) 数列$\{a_n\}$の項a_nがすべて整数であるための必要十分条件は，$b,\ c$がともに整数であることである．これを証明せよ．

8 コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする．

- コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする．
- コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする．
- コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする．

例えばコインを 3 回投げて (裏, 表, 裏) の順に出たときの得点は $1+1+1=3$ より 3 点となる．また (裏, 裏, 表) のときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる．コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ．

(2) $n \leqq m \leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ．

9 双曲線 $x^2 - y^2 = 1 \cdots$① の漸近線 $y = x \cdots$② 上の点 $\mathrm{P}_0 : (a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0 > 0$) を通る双曲線 ① の接線を考え，接点を Q_1 とする．Q_1 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_1 : (a_1,\ a_1)$ とする．次に P_1 を通る双曲線 ① の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_2 : (a_2,\ a_2)$ とする．この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n : (a_n,\ a_n)$，$\mathrm{Q}_n$ を定義していく．

(1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を a_0 を用いて表せ．

(3) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ．

10 0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

となることを示せ．

(2) 定積分

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$$

の値を求めよ．

11 c を実数とし，曲線 $y = x^2 + c \cdots$ ① と曲線 $y = \log x \cdots$ ② の共通接線を考える．

(1) 共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ．

(2) 共通接線が 1 本であるとき，その接線と ①，② それぞれとの接点を求めよ．

(3) 共通接線が 1 本であるとき，①，② と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

12 平面上に 2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している．点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く．二点 P_1，P_2 はそれおぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する．P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする．P_1 と P_2 の中点を M とおく．P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{13}}$ 関数 $f(x) = |x + 2\sin(x + a) + b|$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ での最大値と最小値の差は，定数 a，b によらず常に π 以上で，かつ $\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=|x^2-6x-|x-6||+x$ とおく

(I) $x \geqq 6$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2-6x-(x-6)|+x = |(x-1)(x-6)|+x \\ &= (x-1)(x-6)+x = (x-3)^2-3 \end{aligned}$$

(II) $x < 6$ のとき

$$f(x) = |x^2-6x+(x-6)|+x = |(x+1)(x-6)|+x$$

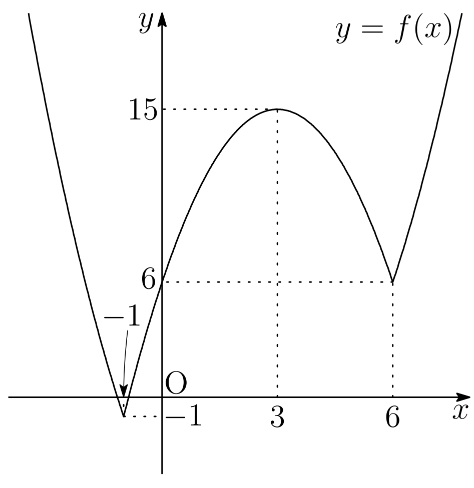
(i) $x \leqq -1$ のとき

$$f(x) = (x+1)(x-6)+x = (x-2)^2-10$$

(ii) $-1 < x < 6$ のとき

$$f(x) = -(x+1)(x-6)+x = -(x-3)^2+15$$

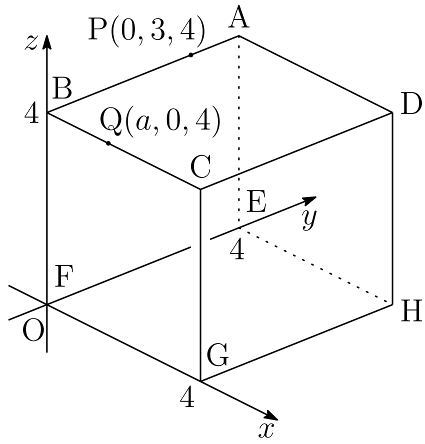
(I)，(II) より，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．



求める個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -1} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = -1} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-1 < a < 6,\ 15 < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = 6,\ 15} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{6 < a < 15} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 立方体 ABCD-EFGH を右の図のように，点 F を原点 O とする座標空間にとると



$$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(0,\ 3,\ 4),\quad \overrightarrow{\mathrm{FQ}}=(a,\ 0,\ 4)$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{FPQ}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{FQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{25(a^2+16)-16^2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}}\end{aligned}$$

発展 ベクトル積 (外積) を利用すると[1]，$\overrightarrow{\mathrm{FP}}\times\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=(12,\ 4a,-3a)$ より

$$\triangle\mathrm{FPQ}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{FP}}\times\overrightarrow{\mathrm{FQ}}|=\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}$$

(2) 三角錐 BPQF の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{6}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BF}=\frac{1}{6}\cdot3\cdot a\cdot4=2a$$

$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PFQ}\cdot\mathrm{BK}=V$ であるから

$$\mathrm{BK}=\frac{3V}{\triangle\mathrm{PFQ}}=\frac{3\cdot2a}{\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}}=\boldsymbol{\frac{12a}{\sqrt{25a^2+144}}}$$

(3) $a=0$ のとき，$\mathrm{BK}=\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$ である．$0<a\leqq4$ のとき，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\frac{1}{\mathrm{BK}}=\frac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\frac{\sqrt{25a^2+144}}{12a}=\frac{1}{2\sqrt{30}}\sqrt{25a+\frac{144}{a}}\quad\cdots(*)$$

ここで，$25a$ と $\dfrac{144}{a}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

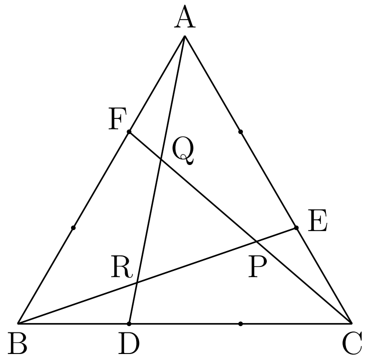
$$25a+\frac{144}{a}\geqq2\sqrt{25a\cdot\frac{144}{a}}=120\quad\cdots(**)$$

$(**)$ で等号が成立するとき　$25a=\dfrac{144}{a}$　すなわち　$a=\dfrac{12}{5}$　$(0<a\leqq4)$

$(*)$，$(**)$ より　$\dfrac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{BK}}\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{30}}\sqrt{120}=1$　よって　$\mathrm{BK}\leqq\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABE と直線 FP および $\triangle$BCE と直線 RD について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = 1, \quad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RB}} = 1$$

したがって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RB}} = 1$$

ゆえに　$\mathrm{BP} : \mathrm{PE} = 6 : 1, \quad \mathrm{ER} : \mathrm{RB} = 4 : 3$

すなわち　$\mathrm{BR} : \mathrm{RP} : \mathrm{PE} = 3 : 3 : 1$

同様に　$\mathrm{CP} : \mathrm{PQ} : \mathrm{QF} = 3 : 3 : 1, \quad \mathrm{AQ} : \mathrm{QR} : \mathrm{RD} = 3 : 3 : 1$

$\mathrm{AD} = \mathrm{BE} = \mathrm{CF}$ であるから，$\mathrm{PQ} = \mathrm{QR} = \mathrm{RP}$　ゆえに　$\triangle$PQR は正三角形

$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos 60^\circ = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{9}$$

$\mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ であるから　$\mathrm{QR} = \dfrac{3}{7}\mathrm{AD} = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

よって，正三角形 PQR の面積は　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{28}}$

発展 $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると ($\vec{b}$，$\vec{c}$ を空間のベクトルと考える)

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{1}{7}(2\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \frac{3}{7}\left(\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{7}(-\vec{b}+3\vec{c})$$

ベクトル積 $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は，$\vec{c}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}$，$\vec{c}\times\vec{c} = \vec{0}$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{1}{49}(2\vec{b}+\vec{c}) \times (-\vec{b}+3\vec{c}) = \frac{1}{7}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{1}{14}|\vec{b}\times\vec{c}| = \dfrac{1}{14}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{28}$

なお，$|\vec{b}\times\vec{c}|$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の張る平行四辺形の面積である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ さいころを1回振って6の目が出る確率を p，6以外の目が出る確率を q とおく．

(i) 4回目に6の目が出るとき，1回目から3回目に6の目が1回または3回出て，5回目に6以外の目が出る．このときの確率は

$$\left(\frac{3!}{1!2!}pq^2+p^3\right)pq=pq(p^3+3pq^2)$$

(ii) 4回目に6の目が出ないとき，1回目から3回目に6の目が出ないまたは2回出て，5回目に6の目が出る．このときの確率は

$$\left(q^3+\frac{3!}{2!1!}p^2q\right)qp=pq(3p^2q+q^3)$$

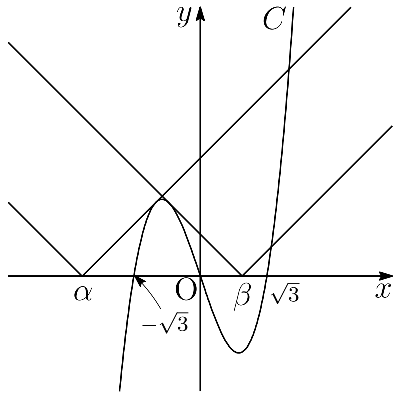
(i)，(ii) から，求める確率は，$p=\dfrac{1}{6}$，$q=\dfrac{5}{6}$，$p+q=1$ により

$$\begin{aligned}pq(p^3+3pq^2)+pq(3p^2q+q^3)&=pq(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)\\&=pq(p+q)^3=\boldsymbol{\frac{5}{36}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$，すなわち，$x^3-3x=|x-m|$ の実数解の個数は，$C: y=x^3-3x$ と $y=|x-m|$ の共有点の個数である．$f(x)=x^3-3x$ とおくと，$f(x) \geqq 0$ であるのは $\quad -\sqrt{3} \leqq x \leqq 0,\ \sqrt{3} \leqq x \quad \cdots(*)$

区間 $(*)$ において，$f'(x)=1$ を解くと

$$3x^2-3=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$



C 上の点 $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{10}{3\sqrt{3}}=x+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

すなわち $\qquad y=x+\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$

この直線と x 軸との共有点の x 座標を α とすると $\quad \alpha=-\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$

区間 $(*)$ において，$f'(x)=-1$ を解くと

$$3x^2-3=-1 \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

C 上の点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=-\left(x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-x+\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

この直線と x 軸との共有点の x 座標を β とすると $\quad \beta=\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

上のグラフから，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{m<\alpha,\ \beta<m} \ \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{m=\alpha,\ \beta} \ \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\alpha<m<\beta} \ \textbf{のとき} & \textbf{3 個} \end{cases} \qquad \left(\boldsymbol{\alpha=-\frac{16}{3\sqrt{3}},\ \beta=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 法 7 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 7)$$

l を 0 以上の整数とすると

$$2^{3l} \equiv 1, \quad 2^{3l+1} \equiv 2, \quad 2^{3l+2} \equiv 4 \quad (\mathrm{mod}\ 7) \qquad (*)$$

したがって，2^k を 4 で割った余りが 4 であるとき

$$k = 3l + 2 \quad (l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表される．よって，k を 3 で割った余りは 2 である．

(2) $4m + 5n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，$4 \equiv 1,\ 5 \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ であるから

$$1m + (-1)n \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv n \quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

(i) $m \equiv n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 1^n \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 7)$$

(ii) $m \equiv n \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 2^n \equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ 7)$$

(iii) $m \equiv n \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 4^n \equiv (2^n)^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ 7)$$

(i)〜(iii) から，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 2 次方程式 $x^2 - bx - c = 0$ の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = -c$$

上の 2 式と $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ を次式

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

に適用すると $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

別解 $\alpha,\ \beta$ は，2 次方程式 $x^2 = bx + c$ の解であるから

$$\alpha^2 = b\alpha + c, \quad \beta^2 = b\beta + c$$

ゆえに　$\alpha^{n+1} = b\alpha^n + c\alpha^{n-1}, \quad \beta^{n+1} = b\beta^n + c\beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
上の 2 式の辺々を加えると

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = b(\alpha^n + \beta^n) + c(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ より　$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2)
$$a_2 = \alpha + \beta = b,$$
$$a_3 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = {a_2}^2 + 2c$$
$$a_5 = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = {a_3}^2 - 2c^2$$

第 1 式から，a_2 が整数のとき，b は整数である．
第 2 式と第 3 式から

$$2c = a_3 - {a_2}^2, \quad \frac{1}{2}(2c)^2 = {a_3}^2 - a_5$$

上の 2 式の右辺はともに整数であるから，$2c$ は偶数より，c は整数である．
逆に，b，c が整数であるとき，$a_1 = 1$，$a_2 = b$ は整数であり，(1) で示した漸化式により，a_n はすべて整数である．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $P_{n,2n-1}$ は 2 回目以降，毎回ひとつ前の回と同じ面が出る確率であるから

$$P_{n,2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$P_{n,2n-2}$ は 2 回目以降，1 回だけひとつ前の回と異なる目が出て，残りの $n-2$ 回はひとつ前の回と同じ目が出る確率であるから

$$P_{n,2n-2} = \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{n-1}{2^{n-1}}}$$

(2) $P_{n,m}$ は 2 回目以降，一つ前の回と同じ目が $m-n$ 回で，残りの

$$(n-1)-(m-n)\text{ 回}\quad\text{すなわち}\quad 2n-m-1\text{ 回}$$

が一つ前の回と異なる目が出る確率であるから

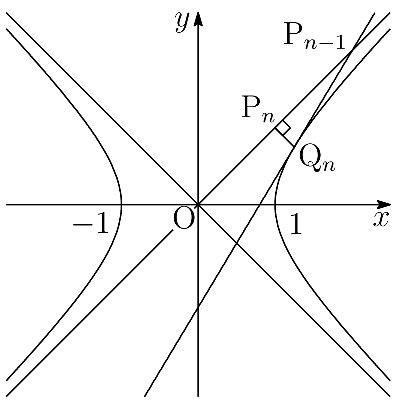
$$\begin{aligned} P_{n,m} &= \frac{(n-1)!}{(m-n)!(2n-m-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)!}{(m-n)!(2n-m-1)!\cdot 2^{n-1}}} \end{aligned}$$

補足 2 回目以降，一つ前の回と同じ目である回数を x 回，一つ前の回と異なる目である回数を y 回とすると

$$x+y=n-1,\quad 1+2x+y=m$$

これを解くと　$x=m-n,\ y=2n-m-1$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通り，$y=x$ に垂直な直線は



$$y=-x+2a_n$$

と $x^2-y^2=1$ から y を消去すると

$$x^2-(-x+2a_n)^2=1$$

これを解いて　$x=a_n+\dfrac{1}{4a_n}$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}_n\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)}$

(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 $\mathrm{Q}_n\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)$ における接線は

$$\left(a_n+\frac{1}{4a_n}\right)x-\left(a_n-\frac{1}{4a_n}\right)y=1$$

これと $y=x$ から y を消去すると

$$\frac{1}{2a_n}x=1 \quad \text{これを解いて} \quad x=2a_n$$

これが点 P_{n-1} の x 座標であるから　$a_{n-1}=2a_n$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$　　よって　$a_n=a_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\dfrac{a_0}{2^n}}$

(3) $a_0>0$ であるから，(2) の結果から　$a_n>0$

$\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$，$\mathrm{Q}_n\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)$，$\mathrm{P}_{n-1}(2a_n,\ 2a_n)$ より

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{\sqrt{2}}{4a_n},\quad \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}=\sqrt{2}a_n$$

$\angle\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\cdot\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4a_n}\cdot\sqrt{2}a_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

補足 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

放物線 $x^2=4py$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 加法定理により

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

これに $\alpha=(n-1)\theta,\ \beta=\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta+\cos(n-2)\theta=2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

したがって　$\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta$

$x=\cos\theta$ とすると，$\cos n\theta$ は x の n 次多項式で，これを $T_n(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}&T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\\&T_0(x)=\cos 0=1,\quad T_1(x)=\cos\theta=x\end{aligned}$$

したがって，$T_n(x)$ は一意的に定まる．

よって　$\cos n\theta=T_n(x)=T_n(\cos\theta)$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx$ について，(1) の結果を用いると，$x=\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta,$$

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$\pi\longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx&=\int_{\pi}^{0}\cos n\theta(-\sin\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]_0^{\pi}\\&=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{2(n-1)}\\&=\{1-(-1)^{n+1}\}\left\{\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n-1)}\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}}\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2-1} & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}}$ と解答してもよい．

$\boxed{\textbf{11}}$ (1) 曲線 $y = \log x \cdots$ ② 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{t}x + \log t - 1 \quad \cdots ③$$

この接線と放物線 $y = x^2 + c \cdots$ ① から y を消去して整理すると

$$x^2 - \frac{1}{t}x - \log t + 1 + c = 0 \quad \cdots (*)$$

① と ③ が接するとき，x に関する 2 次方程式 $(*)$ の係数について

$$\left(-\frac{1}{t}\right)^2 - 4\cdot 1(-\log t + 1 + c) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{1}{4t^2} + \log t - 1$$

$f(t) = \dfrac{1}{4t^2} + \log t - 1$ とおくと　$f'(t) = -\dfrac{1}{2t^3} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{2t^2 - 1}{2t^3}$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	$-\frac{1+\log 2}{2}$	$\nearrow$

ここで，$g(t) = \log t + \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ $(0 < t \leqq 1)$ とおくと

$$0 < t < 1 \text{ のとき} \quad g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - 1}{t\sqrt{t}} < 0$$

$g(t)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(t) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log t + \frac{2}{\sqrt{t}} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \log t > -\frac{2}{\sqrt{t}}$$

$0 < t \leqq 1$ において　$f(t) = \dfrac{1}{4t^2} + \log t - 1 > \dfrac{1}{4t^2} - \dfrac{2}{\sqrt{t}} - 1$

$$\lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{4t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} - 1\right) = \lim_{t \to +0} \left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{4t\sqrt{t}} - 2\right) - 1\right\} = \infty$$

したがって　$\displaystyle\lim_{t \to +0} f(t) = \infty$　また　$\displaystyle\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$

よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{c < -\dfrac{1 + \log 2}{2}} \text{ のとき} & \textbf{0 本} \\ \boldsymbol{c = -\dfrac{1 + \log 2}{2}} \text{ のとき} & \textbf{1 本} \\ \boldsymbol{c > -\dfrac{1 + \log 2}{2}} \text{ のとき} & \textbf{2 本} \end{cases}$$

(2) 共通接線が 1 本であるとき，(1) の増減表から　$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

その接線の方程式は，これを ③ に代入すると

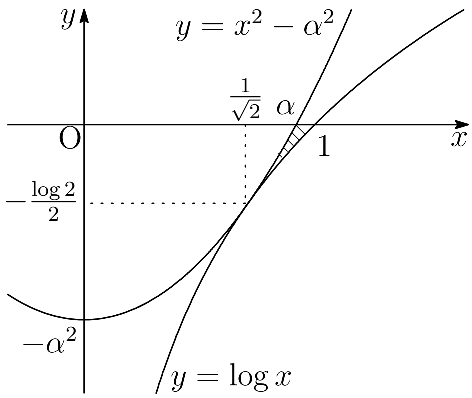
$$\boldsymbol{y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}\log 2 - 1}$$

① と共通接線 ③ の接点の x 座標は，2 次方程式 $(*)$ の重解であるから

$$x = -\frac{-\frac{1}{t}}{2} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

② と共通接線 ③ の接点 $(t,\ \log t)$ の座標は　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\log 2}{2}\right)$

よって，接線と ①，② との接点は一致し，その座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\log 2}{2}\right)}$



(3) 共通接線が 1 本であるとき，(1) の結果より，$c = -\dfrac{1+\log 2}{2}$ であるから，

$\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\log 2}{2}}$，求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned}
S &= -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \log x\,dx - (-1)\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\alpha} (x^2 - \log x)\,dx \\
&= \Big[\ x(1-\log x)\ \Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} + \Big[\ \frac{x^3}{3} - \alpha^2 x\ \Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\alpha} \\
&= 1 - \frac{7}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha^3 \\
&= 1 - \frac{7}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\log 2}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1+\log 2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{(1+\log 2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ における P_1，P_2 の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}_1(\cos t,\ \sin t),\quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

であり，2 点 P_1，P_2 の中点 M の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t,\quad y=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=f(t),\quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

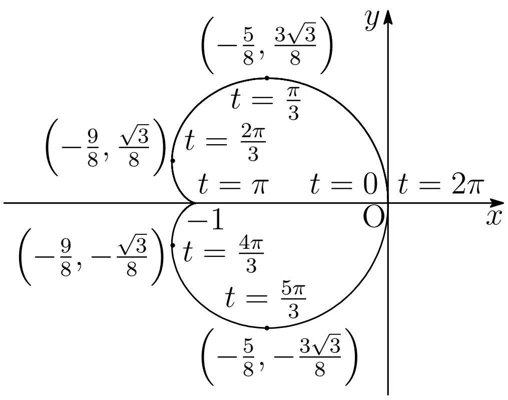
であるから，点 M が描く軌跡は x 軸に関して対称である．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\frac{1}{2}(\sin t+\sin 2t)=-\frac{1}{2}(\sin t+2\sin t\cos t)\\&=-\frac{1}{2}\sin t(1+2\cos t)\\\frac{dy}{dt}&=\frac{1}{2}(\cos t+\cos 2t)=\frac{1}{2}(\cos t+2\cos^2 t-1)\\&=\frac{1}{2}(\cos t+1)(2\cos t-1)\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \pi$ における x，y の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\cdots$	$\left(-\frac{5}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$\left(-\frac{9}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$(-1, 0)$

点 M の軌跡は x 軸に関して対称であるから，その概形は次のようになる．



求める面積を S とすると，その図形の x 軸に関する対称性に注意して

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(0)} y\,dx - \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(\pi)} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\
&= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\left(-\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (2\sin^2 t + \sin^2 2t + 3\sin t \sin 2t)\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + 6\sin^2 t\cos t\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\left[\,\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 4t + 2\sin^3 t\,\right]_0^{\pi} = \frac{3}{16}\pi
\end{aligned}
$$

よって，求める面積は　$S = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $g(x) = x + 2\sin x$ とおくと

$$\begin{aligned} x + 2\sin(x+a) + b &= (x+a) + 2\sin(x+a) + b - a \\ &= g(x+a) + b - a \end{aligned}$$

したがって，$y = x + 2\sin(x+a) + b$ のグラフは，$y = g(x)$ のグラフを，x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $b-a$ だけ平行移動したものである．また，$y = g(x)$ のグラフを x 軸方向に 2π，y 軸方向に 2π だけ平行移動したものは

$$y = g(x - 2\pi) + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad y = g(x)$$

したがって，$y = g(x)$ のグラフを x 軸方向に 2π，y 軸方向に 2π だけ平行移動したものも，$y = g(x)$ である．また，$g(0) = 0$，$g(\pi) = \pi$ および次式から，$y = g(x)$ のグラフは原点 $(0,\ 0)$ および点 $(\pi,\ \pi)$ に関して対称である．

$$g(x) + g(-x) = 0 = 2g(0), \quad g(\pi - x) + g(\pi + x) = 2\pi = 2g(\pi)$$

$g(x) = x + 2\sin x$ より　　$g'(x) = 1 - 2\cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{4\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	2π

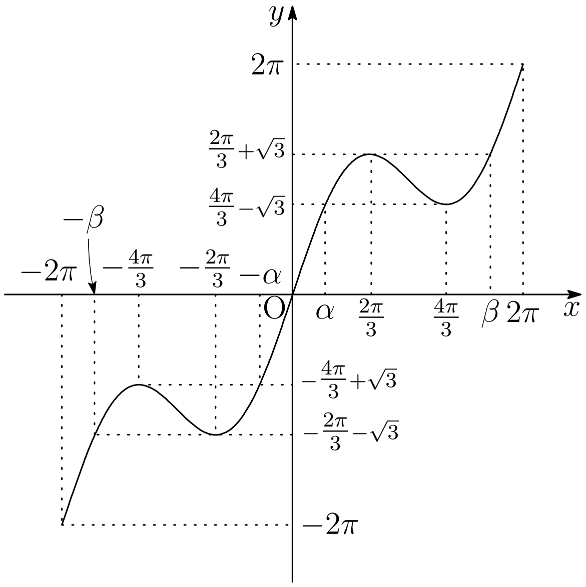
増減表から

$$g(\alpha) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \ \left(0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}\right), \quad g(\beta) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \ \left(\frac{4\pi}{3} < \beta < 2\pi\right)$$

を満たす α，β が唯一存在し，$y = g(x)$ の点 $(\pi,\ \pi)$ に関する対称性により

$$\alpha + \beta = 2\pi$$

$g(x+2\pi)=g(x)+2\pi$ より，$-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における $y=g(x)$ のグラフは次のようになる (原点対称)．また，$-\beta+2\pi=\alpha$，$-\alpha+2\pi=\beta$ である．



区間 $x_0 \leqq x \leqq x_0+2\pi$ における $g(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

(i) $-2\pi \leqq x_0 < -\beta$ のとき，$M=g(x_0+2\pi)$，$m=g(x_0)$ であるから

$$M-m=g(x_0+2\pi)-g(x_0)=2\pi$$

(ii) $-\beta \leqq x_0 < -\dfrac{4\pi}{3}$ のとき，$M=g(x_0+2\pi)$，$m=g\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ であるから

$$M-m=g(x_0+2\pi)-g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<g\left(\frac{2\pi}{3}\right)-g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$$

(iii) $-\dfrac{4\pi}{3} \leqq x_0 < -\alpha$ のとき，$M=g\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$m=g\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ であるから

$$M-m=g\left(\frac{2\pi}{3}\right)-g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$$

(iv) $-\alpha \leqq x_0 < 0$ のとき，$M=g(x_0+2\pi)$，$m=g(x_0)$ であるから

$$M-m=g(x_0+2\pi)-g(x_0)=2\pi$$

(i)〜(iv) より　　$2\pi \leqq M-m \leqq \dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$

$A=\max\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}\{g(x+a)+b-a\}$，$B=\min\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}\{g(x+a)+b-a\}$ とおくと

$$2\pi\leqq A-B\leqq\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$$

(a) $0\leqq B<A$ または $B<A\leqq 0$ のとき

$$\max_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)-\min_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)=|A-B|$$

したがって　$2\pi\leqq\max\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)-\min\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)\leqq\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$

(b) $B<0<A$ のとき

$$\max_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)=\max(|A|,\ |B|),\qquad \min_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)=0$$

$$\begin{aligned}\max(|A|,\ |B|)&=\max\left(\left|\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right|,\ \left|\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right|\right)\\&=\left|\frac{A+B}{2}\right|+\left|\frac{A-B}{2}\right|\end{aligned}$$

このとき，$0\leqq|A+B|<|A-B|$ であるから

$$\left|\frac{A-B}{2}\right|\leqq\left|\frac{A+B}{2}\right|+\left|\frac{A-B}{2}\right|<|A-B|$$

したがって　$\pi\leqq\max\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)-\min\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)<\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$

(a)，(b) より　$\pi\leqq\max\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)-\min\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}f(x)\leqq\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$

補足 $\max(|x+y|,\ |x-y|)=|x|+|y|$