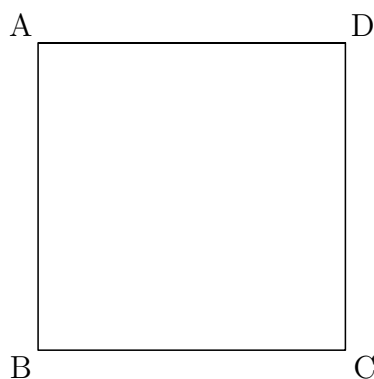


平成 26 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) ① ~ ④ (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・教育 (情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (物理化学・生命科学・人間科学) ①, ④, ⑥, ⑦ (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学) ①, ②, ③, ④, ⑥, ⑦ (150 分) 数 I・II・A・B
- 先進科学プログラム (物理・電気電子・ナノサイエンス・画像科学・情報画像) ⑤, ⑥, ⑧, ⑨, ⑩ (120 分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・⑤, ⑥, ⑧, ⑨, ⑩ (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 ⑤, ⑥, ⑩, ⑪, ⑬ (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) ⑤, ⑥, ⑧, ⑩, ⑫, ⑬ (180 分) 数 I・II・III・A・B・C

- ① 下図のような 1 辺の長さ 10cm の正方形 ABCD がある．点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1cm 進む．また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2cm 進む．点 R が A に達するまでに $\triangle PQR$ の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ．



- ② $\triangle ABC$ において， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ の大きさをそれぞれ A ， B ， C とするとき，次の等式が成り立つとする．

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$$

また， A ， B ， C のうち最も大きな角は 120° であるとする．このとき， $\cos A$ ， $\cos B$ ， $\cos C$ の値をそれぞれ求めよ．

3 p は奇数である素数とし、 $N = (p+1)(p+3)(p+5)$ とおく。

- (1) N は 48 の倍数であることを示せ。
- (2) N が 144 の倍数になるような p の値を、小さい順に 5 つ求めよ。

4 A, B ふたりは、それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち、それを用いて何回かの勝負から成るつぎのゲームをする。

- 初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ、よくかき混ぜる。
- A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し、そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち、大きい番号のついたカードを取り出したほうがこの回は勝ちとし、番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- 袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- A, B どちらかが 2 回勝てば、カードの取り出しをやめて、2 回勝ったほうをゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ。

5 袋の中に、赤玉が 3 個、白玉が 7 個入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し、色を確認してから、再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに、赤玉を A 回 (ただし $0 \leq A \leq N$) 取り出す確率を $p(N, A)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 確率 $p(N, A)$ を N と A を用いて表せ。
- (2) N が 10 の倍数、すなわち $N = 10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n, 0), p(10n, 1), \dots, p(10n, 10n)$ のうち、一番大きな値は $p(10n, 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a , 自然数 b に対して、 $\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$ を示す。ただし $0! = 1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して、 $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$ を示す。

6 座標平面上に、原点を中心とする半径1の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する2辺がなす三角形の3辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

7 実数 a に対し、関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と2個の共有点を持つための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

8 座標平面上に、円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ と点 $Q(1, 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3, 0)$ とし、 x 軸上の点 P_2, P_3, \dots を以下の条件によって決め、 P_n の座標を $(p_n, 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き、その y 座標が正である接点を T_n とする。
このとき、3点 Q, T_n, P_{n+1} は同一直線上にある。 ($n = 1, 2, \dots$)

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 T_1 の座標を求めよ。
- (2) 点 P_2 の座標を求めよ。
- (3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。
- (4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

9 n, m を0以上の整数とし、

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。
- (2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

を示せ。

- (3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \dots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$$

を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

10 関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2 \cos x)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ の値を求めよ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x \geq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geq f(x)$ が成り立つことを示せ。

11 関数 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) と正の実数 a について、以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $\frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

12 以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 座標平面上の点 $(0, a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ。

13 自然数 n に対して、和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき、2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに、自然数 m, n ($m < n$) に対して、和

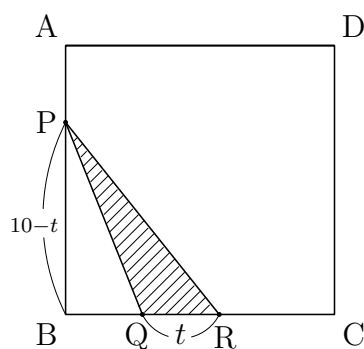
$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。 $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならないことを示せ。

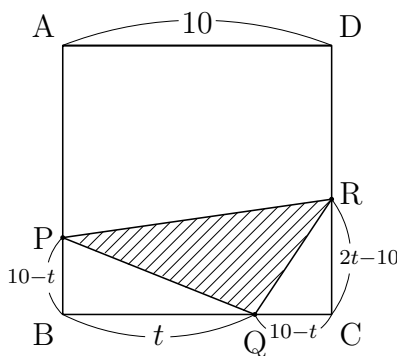
解答例

1 時刻を t とすると、点 R が A に達するのは、 $t = 15$ のときである。 $\triangle PQR$ の面積を S とし、次の (i)~(iii) の場合に分けて考える。

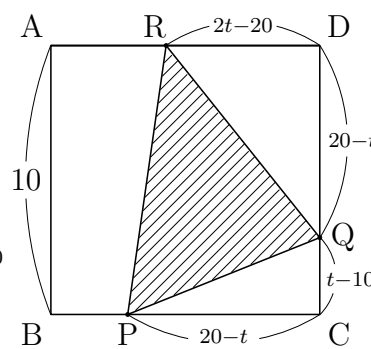
(i) $0 \leq t \leq 5$



(ii) $5 \leq t \leq 10$



(iii) $10 \leq t \leq 15$



(i) $0 \leq t \leq 5$ のとき

$$S = \frac{1}{2}t(10 - t) = -\frac{1}{2}(t - 5)^2 + \frac{25}{2} < 35$$

このとき、 $S = 35$ となることはない。

(ii) $5 \leq t \leq 10$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\{(10 - t) + (2t - 10)\} \cdot 10 - \frac{1}{2}t(10 - t) - \frac{1}{2}(10 - t)(2t - 10) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50 \end{aligned}$$

$$S = 35 \text{ より } \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50 = 35 \text{ ゆえに } t^2 - 10t + 10 = 0$$

$$5 \leq t \leq 10 \text{ に注意してこれを解くと } t = 5 + \sqrt{15}$$

(iii) $10 \leq t \leq 15$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\{(2t - 20) + (20 - t)\} \cdot 10 - \frac{1}{2}(20 - t)(t - 10) - \frac{1}{2}(20 - t)(2t - 20) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 \end{aligned}$$

$$S = 35 \text{ より } \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 = 35 \text{ ゆえに } 3t^2 - 80t + 530 = 0$$

$$10 \leq t \leq 15 \text{ に注意してこれを解くと } t = \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$$

(i)~(iii) から、求める時刻は $5 + \sqrt{15}$, $\frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$ ■

2 $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とおくと, 正弦定理より $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

これと等式 $\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$ により $a : b = 5 : 3$

$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ を求めるとき, $a = 5$, $b = 3$ として計算してもよい.

$a > b$ より, $B \neq 120^\circ$ であるから, 次の (i), (ii) の場合に分けて求める.

(i) $C = 120^\circ$ のとき, 余弦定理により

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 49$$

$c > 0$ より, $c = 7$ であるから

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{7^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{13}{14} \\ \cos C &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) $A = 120^\circ$ のとき, 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ により

$$5^2 = 3^2 + c^2 - 2 \cdot 3c \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad c^2 + 3c - 16 = 0 \quad (*)$$

$$c > 0 \text{ より, } c = \frac{-3 + \sqrt{73}}{2} \quad (*) \text{ より, } c^2 = -3c + 16, \quad \frac{16}{c} = c + 3$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c^2 + 5^2 - 3^2}{2c \cdot 5} = \frac{c}{10} + \frac{16}{10c} = \frac{c}{10} + \frac{c+3}{10} \\ &= \frac{c}{5} + \frac{3}{10} = \frac{-3 + \sqrt{73}}{10} + \frac{3}{10} = \frac{\sqrt{73}}{10} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 3^2 - (-3c + 16)}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{c}{10} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{-3 + \sqrt{73}}{20} + \frac{3}{5} = \frac{9 + \sqrt{73}}{20} \end{aligned}$$

(i), (ii) より

$$(\cos A, \cos B, \cos C) = \left(\frac{11}{14}, \frac{13}{14}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{73}}{10}, \frac{9 + \sqrt{73}}{20} \right)$$

■

- 3** (1) p は、奇素数であるから、 $p+1=2n$ とおくと (n は整数)

$$\begin{aligned} N &= (p+1)(p+3)(p+5) = 2n(2n+2)(2n+4) \\ &= 8n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

連続する3整数 $n, n+1, n+2$ の中には、2の倍数および3の倍数が少なくとも1つあるから、 $n(n+1)(n+2)$ は6の倍数である。

よって、 N は、 8×6 、すなわち、48の倍数である。

- (2) 法3について $p+3 \equiv p$, $p+5 \equiv p+2 \pmod{3}$

したがって、 $p+1, p+3, p+5$ の中で3の倍数は1つだけである。

N が $144 = 3 \times 48$ の倍数であるとき、 $p+5, p+3, p+1$ のいずれかが9の倍数でなければならない。自然数 k を用いて、これらを $9k$ とすると

$$p = 9k - 5, 9k - 3, 9k - 1$$

が素数となるものを小さい順に5つ求めればよい。このとき、 k が奇数のとき、 p は偶数となるから、 k が偶数の場合について調べればよい。

k	2	4	6	8
$9k-5$	13	31	49	67
$9k-3$	15	33	51	69
$9k-1$	17	35	53	71

よって、求める p の値を小さい順に5つ求めると

$$\mathbf{13, 17, 31, 53, 67}$$



- 4** (1) A, B の取り出し方は、ともに $4!$ 通りある。A が0勝0敗4引き分けとなるのは、A, B の取り出し方が一致する場合で、 $4!$ 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{4!}{4!4!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

- (2) A が1勝1敗2引き分けとなるのは、A の取り出し方に対して、B の取り出し方が、A と2回一致する場合で、 $4!_4C_2$ 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{4!_4C_2}{4!4!} = \frac{4C_2}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

- (3) ゲームが引き分けとなるのは、(1)と(2)の場合に限る。また、Aが勝者になる確率とBが勝者になる確率は等しく、この確率を p とすると

$$2p + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad p = \frac{17}{48}$$

よって、求める確率は $\frac{17}{48}$ ■

- 5** (1) 袋から無作為に1個取り出したとき、赤玉である確率が $\frac{3}{10}$ であるから、この試行を N 回繰り返したとき、赤玉を A 回取り出す確率は

$$p(N, A) = {}_N C_A \left(\frac{3}{10}\right)^A \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{N-A} = {}_N C_A \left(\frac{3}{10}\right)^A \left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}$$

- (2) (i) 0以上の整数 a , 自然数 b に対して

$$\begin{aligned} a < b \text{ のとき} \quad & \frac{b!}{a!} = (a+1)(a+2)\cdots b < \overbrace{b \cdot b \cdots b}^{b-a \text{ 個}} = b^{b-a} \\ a = b \text{ のとき} \quad & \frac{b!}{a!} = 1, \quad b^{b-a} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b!}{a!} = b^{b-a} \\ a > b \text{ のとき} \quad & \frac{b!}{a!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots a} < \frac{1}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{a-b \text{ 個}}} = b^{b-a} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$$

- (ii) (1)の結果を利用すると

$$p(10n, m) = {}_{10n} C_m \left(\frac{3}{10}\right)^m \left(\frac{7}{10}\right)^{10n-m}$$

$$p(10n, 3n) = {}_{10n} C_{3n} \left(\frac{3}{10}\right)^{3n} \left(\frac{7}{10}\right)^{7n}$$

上の2式および(i)の結果を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} &= \frac{{}_{10n} C_m}{{}_{10n} C_{3n}} \left(\frac{3}{10}\right)^{m-3n} \left(\frac{7}{10}\right)^{3n-m} \\ &= \frac{(3n)!}{m!} \cdot \frac{7n!}{(10n-m)!} \left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m} \\ &\leq (3n)^{3n-m} (7n)^{m-3n} \left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m} \\ &= \frac{(3n)^{3n-m}}{(7n)^{3n-m}} \left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m} = \left(\frac{3n}{7n}\right)^{3n-m} \left(\frac{7}{3}\right)^{3n-m} = 1 \end{aligned}$$

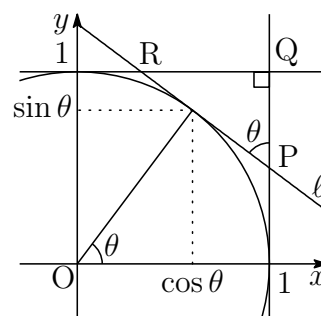
したがって $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$ よって $p(10n, m) \leq p(10n, 3n)$ ■

- 6 原点を中心とする半径1の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ における接線を l とすると

$$l : x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

l と直線 $x = 1$ との交点を P とすると

$$P \left(1, \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$



$$Q(1, 1) \text{ とすると } PQ = 1 - \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}$$

右の図の直角三角形 PQR について

$$QR = PQ \tan \theta, \quad RP = \frac{PQ}{\cos \theta}$$

したがって、直角三角形 PQR の周の長さは

$$\begin{aligned} PQ + QR + RP &= PQ \left(1 + \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \end{aligned}$$

直角三角形 PQR の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} PQ \cdot QR = \frac{1}{2} PQ^2 \tan \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta} \right)^2 \tan \theta \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta - 1)^2}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{(\sin \theta + \cos \theta - 1)^2}{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1} = \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta + \cos \theta + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta + 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1} \end{aligned}$$

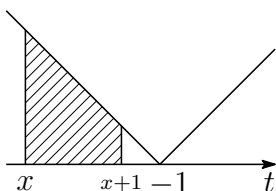
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ であるから、 S が最大となるとき

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

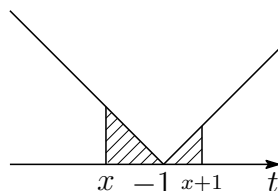


7 $g(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt$ とおくと, $g(x)$ は下の図の斜線部分の面積である.

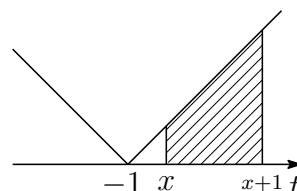
(i) $x+1 \leq -1$



(ii) $x \leq -1 \leq x+1$



(iii) $-1 \leq x$



(i) $x+1 \leq -1$, すなわち, $x \leq -2$ のとき

$$\int_x^{x+1} |t+1| dt = \frac{1}{2}(|x+1| + |x+2|) = -x - \frac{3}{2}$$

(ii) $x \leq -1 \leq x+1$, すなわち, $-2 \leq x \leq -1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} |t+1| dt &= \frac{1}{2}(|x+1|^2 + |x+2|^2) \\ &= x^2 + 3x + \frac{5}{2} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(iii) $-1 \leq x$ のとき

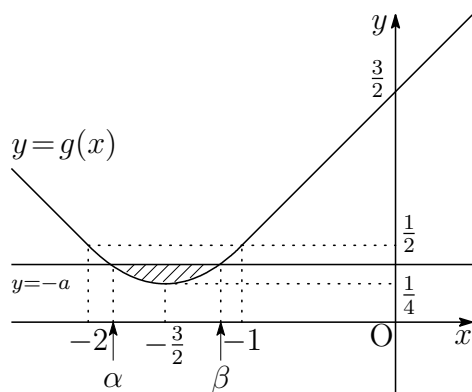
$$\int_x^{x+1} |t+1| dt = \frac{1}{2}(|x+1| + |x+2|) = x + \frac{3}{2}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } g(x) = \begin{cases} -x - \frac{3}{2} & (x \leq -2) \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} & (-2 \leq x \leq -1) \\ x + \frac{3}{2} & (-1 \leq x) \end{cases}$$

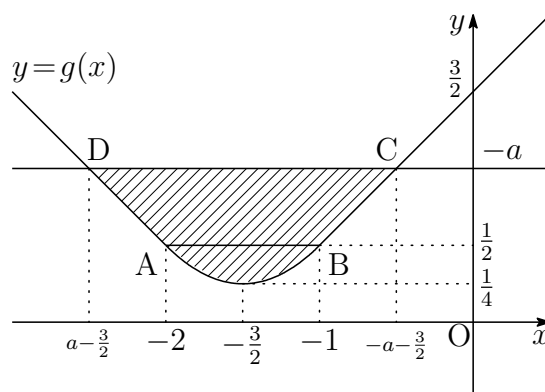
曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点をもつとき, $y = g(x)$ は直線 $y = -a$ と 2 個の共有点をもつから

$$-a > \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad a < -\frac{1}{4}$$

i) $\frac{1}{4} < -a \leq \frac{1}{2}$



ii) $\frac{1}{2} \leq -a$



(i) $\frac{1}{4} < -a \leq \frac{1}{2}$, すなわち, $-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{4}$ のとき

$y = g(x)$ と $y = -a$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -a \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{1}{4}}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2} - \sqrt{-a - \frac{1}{4}}, \quad \beta = -\frac{3}{2} + \sqrt{-a - \frac{1}{4}} \quad \text{とし, 面積を } S(a) \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-a - g(x)\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) + a\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2\sqrt{-a - \frac{1}{4}} \right\}^3 = \frac{4}{3} \left(-a - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq -a$, すなわち, $a \leq -\frac{1}{2}$ のとき, 面積は

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{台形 ABCD} &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \{1 + (-2a)\} \left(-a - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6} + a^2 - \frac{1}{4} = a^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$



- 8 (1) $A(1, 1)$, $B(1, 0)$, $T_n(x_n, y_n)$ とおく. $\overrightarrow{AP_1} = (2, -1)$ に垂直なベクトルを $\vec{v} = (1, 2)$ とおく. B と T_1 は直線 AP_1 に関して対称であるから, 実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AP_1} - \beta \vec{v}, \quad \overrightarrow{AT_1} = \alpha \overrightarrow{AP_1} + \beta \vec{v} \quad (*)$$

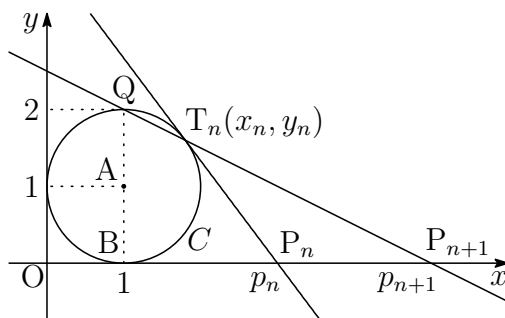
(*) の第 1 式から

$$(0, -1) = \alpha(2, -1) - \beta(1, 2) \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - 2\beta = -1 \end{cases}$$

したがって $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{2}{5}$ これを (*) の第 2 式に代入すると

$$(x_1 - 1, y_1 - 1) = \frac{1}{5}(2, -1) + \frac{2}{5}(1, 2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

よって $T_1\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$



$$(2) \overrightarrow{QT_1} = \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right) - (1, 2) = \frac{2}{5}(2, -1)$$

直線 QT_1 は点 $Q(1, 2)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{2}$ の直線であるから

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}(x - 5)$$

したがって, この直線と x 軸との交点 P_2 の座標は $(5, 0)$

- (3) $\overrightarrow{AP_n} = (p_n - 1, -1)$ に垂直なベクトルを $\vec{v}_n = (1, p_n - 1)$ とおく. B と T_n は直線 AP_n に関して対称であるから, 実数 α_n, β_n を用いて

$$\overrightarrow{AB} = \alpha_n \overrightarrow{AP_n} - \beta_n \vec{v}_n, \quad \overrightarrow{AT_n} = \alpha_n \overrightarrow{AP_n} + \beta_n \vec{v}_n \quad (**)$$

(**) の第 1 式から

$$(0, -1) = \alpha_n(p_n - 1, -1) - \beta_n(1, p_n - 1)$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{cases} (p_n - 1)\alpha_n - \beta_n = 0 \\ -\alpha_n - (p_n - 1)\beta_n = -1 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad \alpha_n = \frac{1}{(p_n - 1)^2 + 1}, \quad \beta_n = \frac{p_n - 1}{(p_n - 1)^2 + 1}$$

これを (**) の第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n - 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{(p_n - 1)^2 + 1} \begin{pmatrix} p_n - 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{p_n - 1}{(p_n - 1)^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ p_n - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p_n - 1)^2 + 1} \begin{pmatrix} 2(p_n - 1) \\ (p_n - 1)^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad x_n = \frac{p_n^2}{(p_n - 1)^2 + 1}, \quad y_n = \frac{2(p_n - 1)^2}{(p_n - 1)^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{T}_n \left(\frac{p_n^2}{(p_n - 1)^2 + 1}, \frac{2(p_n - 1)^2}{(p_n - 1)^2 + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \overrightarrow{QT_n} &= \left(\frac{p_n^2}{(p_n - 1)^2 + 1}, \frac{2(p_n - 1)^2}{(p_n - 1)^2 + 1} \right) - (1, 2) \\ &= \frac{2}{(p_n - 1)^2 + 1} \begin{pmatrix} p_n - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

直線 QT_n は点 $Q(1, 2)$ を通り, ベクトル $\vec{v}_n = (1, p_n - 1)$ に垂直であるから, その方程式は

$$x - 1 + (p_n - 1)(y - 2) = 0$$

点 $P_{n+1}(p_{n+1}, 0)$ はこの直線上の点であるから

$$p_{n+1} - 1 - 2(p_n - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - 1 = 2(p_n - 1)$$

$p_1 = 3$ であるから, 上の第 2 式から $p_n - 1 = (3 - 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n$

したがって $p_n = 2^n + 1$ よって $\mathbf{P}_n(2^n + 1, 0)$

補足 T_n の座標を求めずに, P_n の座標を求めることができる.

2点 $A(1, 1)$, $P_n(p_n, 0)$ を通る直線は

$$x - 1 + (p_n - 1)(y - 1) = 0$$

2点 $B(1, 0)$, $T_n(x_n, y_n)$ の中点 $\left(\frac{x_n + 1}{2}, \frac{y_n}{2}\right)$ はこの直線上にあるから

$$\frac{x_n + 1}{2} - 1 + (p_n - 1)\left(\frac{y_n}{2} - 1\right) = 0$$

すなわち $x_n - 1 + (p_n - 1)(y_n - 2) = 0$

$\overrightarrow{QT_n} = (x_n - 1, y_n - 2)$ は $\vec{v}_n = (1, p_n - 1)$ と垂直であるから, 直線 QT_n は, 点 $Q(1, 2)$ を通り, $\vec{v}_n = (1, p_n - 1)$ と垂直な直線

$$x - 1 + (p_n - 1)(y - 2) = 0$$

点 $P_{n+1}(p_{n+1}, 0)$ はこの直線上の点であるから

$$p_{n+1} - 1 = 2(p_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad p_n - 1 = (p_1 - 1)2^{n-1} = 2^n$$

したがって $p_n = 2^n + 1$ よって $P_n(2^n + 1, 0)$ ■

9 (1) $I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \theta \cdot (m+1) \sin^m \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \theta (\sin^{m+1} \theta)' d\theta \\ &= \frac{1}{m+1} \left[\cos^{n-1} \theta \sin^{m+1} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1} \theta)' \sin^{m+1} \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} \theta (-\sin \theta) \cdot \sin^{m+1} \theta d\theta \\ &= \frac{n-1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \theta \sin^{m+2} \theta d\theta = \frac{n-1}{m+1} I_{n-2, m+2} \end{aligned}$$

(2) $I_{2n+1,2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta \sin^{2m+1} \theta d\theta$ において, $x = \cos^2 \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \cos \theta \sin \theta \quad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline x & 1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_{2n+1,2m+1} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \sin^{2m} \theta (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^0 x^n (1-x)^m dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \end{aligned}$$

(3) (1) の漸化式から

$$\begin{aligned} I_{2n+1,2m+1} &= \frac{(2n+1)-1}{(2m+1)+1} I_{(2n+1)-2, (2m+1)+2} \\ &= \frac{n}{m+1} I_{2(n-1)+1, 2(m+1)+1} \end{aligned}$$

上式の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!} = \frac{I_{2(n-1)+1, 2(m+1)+1}}{(n-1)!(m+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!} = \frac{I_{1,2n+2m+1}}{(n+m)!}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad I_{1,2n+2m+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^{2n+2m+1} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2(n+m+1)} \left[\sin^{2n+2m+2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(n+m+1)} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{I_{2n+1,2m+1}}{n!m!} = \frac{1}{(n+m)!} \cdot \frac{1}{2(n+m+1)} = \frac{1}{2 \cdot (n+m+1)!}$$

$$\text{上式および (2) の等式から} \quad \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx &= \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^m {}_m C_k (-x)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_m C_k \int_0^1 x^{n+k} dx \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{{}_m C_k}{n+k+1} \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(*), (**) より, (3) の等式は成立する.

解説 $J_{n,m} = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ とおくと (n, m は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} J_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 (x^{n+1})'(1-x)^m dx \\ &= \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1}(1-x)^m \right]_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1} dx \\ &= \frac{m}{n+1} J_{n+1,m-1} \end{aligned}$$

上式の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{J_{n,m}}{n!m!} = \frac{J_{n+1,m-1}}{(n+1)!(m-1)!} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{J_{n,m}}{n!m!} = \frac{J_{n+m,0}}{(m+n)!}$$

$$\text{ここで } J_{n+m,0} = \int_0^1 x^{n+m} dx = \frac{1}{n+m+1} \quad \text{よって} \quad J_{n,m} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

この結果を利用すると

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n(\beta-x)^m dx$$

について, $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \beta - \alpha$

x	α	\rightarrow	β
t	0	\rightarrow	1

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n(\beta-x)^m dx &= (\beta-\alpha)^{n+m+1} \int_0^1 t^n(1-t)^m dt \\ &= (\beta-\alpha)^{n+m+1} J_{n,m} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n(\beta-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} (\beta-\alpha)^{n+m+1} \quad \blacksquare$$

10 (1) $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2 \cos x) = 2e^{\sin x}(\sin x - 1) \cos x$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ において, $t = \sin x$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = \cos x, \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -1 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}(\sin x - 1) \cos x dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 e^t(t - 1) dt = 2 \left[e^t(t - 2) \right]_{-1}^1 = \frac{6}{e} - 2e \end{aligned}$$

(2) $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2 \cos x)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x} \cos x(\sin 2x - 2 \cos x) + e^{\sin x}(2 \cos 2x + 2 \sin x) \\ &= e^{\sin x}(\sin 2x \cos x - 2 \cos^2 x + 2 \cos 2x + 2 \sin x) \\ &= e^{\sin x}\{2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^2 x + 2(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x\} \\ &= e^{\sin x}\{2 \sin x(1 - \sin^2 x) - 2(1 - \sin^2 x) + 2(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x\} \\ &= e^{\sin x}(-2 \sin^3 x - 2 \sin^2 x + 4 \sin x) \\ &= 2e^{\sin x} \sin x(1 - \sin x)(\sin x + 2) \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	(2π)
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$		↗		↗	極大	↘	

よって, 最大値は $f(\pi) = 2$

$$(3) \quad g(x) = (x^2 + 2x - 2)e^x \text{ とおくと } g'(x) = x(x + 4)e^x$$

したがって、 $x \geq 0$ のとき $g'(x) \geq 0$ すなわち $g(x)$ は単調増加

$$h(x) = g(x) - f(x) \text{ とおくと}$$

$$h(0) = g(0) - f(0) = -2 - (-2) = 0$$

$f(x)$ は基本周期 2π の周期関数であり、(2) の結果から、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $h(x) \geq 0$ を示せばよい。 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $x \geq \sin x \geq 0$ より

$$g'(x) \geq g'(\sin x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } h'(x) &= g'(x) - f'(x) \\ &\geq g'(\sin x) - f'(x) \\ &= \sin x(\sin x + 4)e^{\sin x} - 2e^{\sin x} \sin x(1 - \sin x)(\sin x + 2) \\ &= e^{\sin x} \sin^2 x(2 \sin x + 3) \geq 0 \end{aligned}$$

$x \geq 0$ において、 $h(x)$ は単調増加であるから

$$h(x) \geq h(0) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad g(x) - f(x) \geq 0$$

よって、 $x \geq 0$ のとき、 $(x^2 + 2x - 2)e^x \geq f(x)$ が成立する。

$$\begin{aligned} \text{別解 } h'(x) &= g'(x) - f'(x) \\ &= x(x + 4)e^x - 2e^{\sin x} \sin x(1 - \sin x)(\sin x + 2) \\ &= 4(xe^x - e^{\sin x} \sin x) + x^2e^x + 2e^{\sin x} \sin^2 x(1 + \sin x) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ のとき $x \geq \sin x$ であるから

$$xe^x - e^{\sin x} \sin x = (x - \sin x)e^x + (e^x - e^{\sin x}) \sin x \geq 0$$

$$\text{したがって } h'(x) \geq 0$$



11 (1) $f(x) = x^x$ ($x > 0$) により, $g(x) = f(x)f(1-x)$ とおくと ($0 < x < 1$)

$$g(x) = x^x(1-x)^{1-x} \quad \text{ゆえに} \quad \log g(x) = x \log x + (1-x) \log(1-x)$$

上の第2式の両辺を微分すると

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - \log(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x} = \log \frac{x}{1-x}$$

$g'(x) = g(x) \log \frac{x}{1-x}$ より, $g(x)$ の $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における増減表は

x	$\frac{1}{4}$	\cdots	$\frac{1}{2}$	\cdots	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		\searrow	極小	\nearrow	

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

よって $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ のとき, 最大値 $\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{2}$

(2) $a > 0$ より, $ax > 0$ かつ $a(1-x) > 0$, すなわち, $0 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} f(ax)f(a(1-x)) &= (ax)^{ax} \{a(1-x)\}^{a(1-x)} \\ &= a^{ax} x^{ax} a^{a(1-x)} (1-x)^{a(1-x)} \\ &= a^a (x^x)^a \{(1-x)^{1-x}\}^a \\ &= f(a) \{f(x)\}^a \{f(1-x)\}^a = f(a) \{g(x)\}^a \end{aligned}$$

$h(x) = \frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とおくと, 上式および(1)の $g(x)$ を用いて

$$h(x) = \frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))} = \frac{g(x)f(a)}{f(a)\{g(x)\}^a} = \{g(x)\}^{1-a}$$

したがって, $g(x)$ の増減表により,

$1-a > 0$, すなわち, $0 < a < 1$ のとき, $x = \frac{1}{2}$ で, 最小値 $\frac{1}{2^{1-a}}$

$1-a = 0$, すなわち, $a = 1$ のとき, 最小値 1

$1-a < 0$, すなわち, $1 < a$ のとき, $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ で, 最小値 $\left(\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\right)^{1-a}$ ■

12 (1) $f(t) = e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right)$ とおくと

$$f'(t) = -e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) + e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) = -\frac{t^3 e^{-t}}{6}$$

$t > 0$ で $f'(t) < 0$ より, $t > 0$ において $f(t)$ は単調減少あるから

$$t > 0 \text{ において } f(t) < f(0) \quad \text{ゆえに} \quad e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) < 1$$

$$\text{したがって } t > 0 \text{ において } e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

(2) $y = xe^x$ より, $y' = (x+1)e^x$

曲線 $y = xe^x$ 上の点 (t, te^t) における接線の方程式は

$$y - te^t = (t+1)e^t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = (t+1)e^t x - t^2 e^t$$

この接線が点 $(0, a)$ を通るから $a = -t^2 e^t$

$$g(t) = -t^2 e^t \text{ とおくと } g'(t) = -2te^t - t^2 e^t = -t(t+2)e^t$$

t	...	-2	...	0	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	\searrow	$-\frac{4}{e^2}$	\nearrow	0	\searrow

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^2 e^t) = -\infty$$

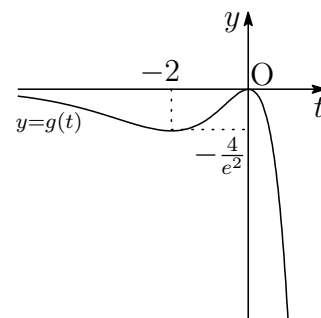
(1) の結果から, $t > 0$ において, $e^t > \frac{t^3}{6}$ ゆえに $0 < \frac{t^2}{e^t} < \frac{6}{t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6}{t} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t^2}{e^t} \right) = 0$$

求める接線の本数と $y = g(t)$ と $y = a$ の共有点の個数は等しいから

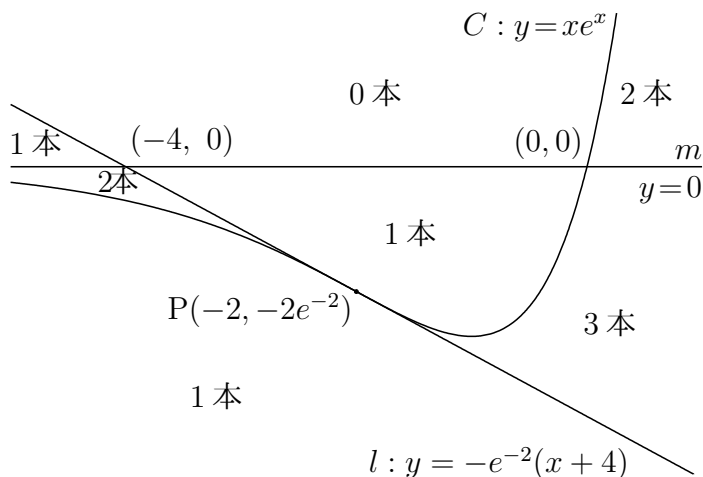
$a < -\frac{4}{e^2}$ のとき	1本
$a = -\frac{4}{e^2}$ のとき	2本
$-\frac{4}{e^2} < a < 0$ のとき	3本
$a = 0$ のとき	1本
$0 < a$ のとき	0本



解説 曲線 $C : y = xe^x$ 上の変曲点 $P(-2, -2e^{-2})$ における接線を $l : y = h(x)$ とすると

$$h(x) = -e^2(x + 4)$$

C の漸近線を $m : y = 0$ とすると, C, l, m を境界する領域から, C に引ける接線の本数は次のようになる.



ただし, 境界線上においては次のようになる.

- 点 P からは C に 1 本の接線が引ける.
- 曲線 C 上の P 以外の点からは C に 2 本の接線が引ける.
- l 上の点 $(x, h(x))$ ($x \leq -2$) からは C に 1 本の接線が引ける. l 上の点 $(x, h(x))$ ($-2 < x$) からは C に 2 本の接線が引ける.
- m 上の点 $(x, 0)$ ($x \leq -4$) からは C に 1 本の接線が引ける. m 上の点 $(x, 0)$ ($-4 < x < 0$) からは C に接線は引けない. 原点 $(0, 0)$ からは C に 1 本の接線が引ける. m 上の点 $(x, 0)$ ($0 < x$) からは C に 2 本の接線が引ける.

補足 3次関数のグラフに引ける接線の本数に関する出題は頻出である¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf 6

- 13** (1) 1 から n までの自然数の中で $2^{f(n)}$ を因数にもつのは、 $k = 2^{f(n)}$ だけである。 k を除く 1 から n までの自然数の逆数の和は

$$S_{\hat{k}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{A_n}{2^{f(n)-1}b_n} \quad (A_n \text{ は整数, } b_n \text{ は奇数})$$

とかける。したがって

$$S_n = S_{\hat{k}} + \frac{1}{2^{f(n)}} = \frac{A_n}{2^{f(n)-1}b_n} + \frac{1}{2^{f(n)}} = \frac{2A_n + b_n}{2^{f(n)}b_n}$$

$a_n = 2A_n + b_n$ とすると

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} \quad (a_n, b_n \text{ は奇数})$$

- (2) $n \geq 2$ のとき $f(n) \geq 1$

S_n ($n \geq 2$) を整数と仮定すると、(1) の結果より

$$S_n 2^{f(n)} b_n = a_n$$

このとき、上式の左辺は偶数、右辺は奇数となり、矛盾。
よって、 S_n は整数にならない。

- (3) $S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$ について ($m < n$)

(I) $m = 1$ のとき

$$S_{1,n} = S_n \quad (n > 1)$$

このとき、(2) の結果から、 $S_{m,n}$ は整数ではない。

(II) $1 < m$ のとき

$$S_{m,n} = S_n - S_{m-1} = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} - \frac{a_{m-1}}{2^{f(m-1)}b_{m-1}}$$

(i) $f(m-1) < f(n)$ のとき、 $p = f(n) - f(m-1)$ とおくと

$$S_{m,n} = \frac{a_n b_{m-1} - 2^p a_{m-1} b_n}{2^{f(n)} b_n b_{m-1}}$$

これから $S_{m,n} 2^{f(n)} b_n b_{m-1} + 2^p a_{m-1} b_n = a_n b_{m-1}$

$S_{m,n}$ が整数であると仮定すると、上式の左辺は偶数、右辺は奇数となり、矛盾。したがって、 $S_{m,n}$ は整数ではない。

(ii) $f(m-1) = f(n)$ のとき

$$2^{f(n)} \leq n < 2^{f(n)+1}, \quad 2^{f(m-1)} \leq m-1 < 2^{f(m-1)+1}$$

このとき $2^{f(n)} \leq m-1 < m < n < 2^{f(n)+1}$

ゆえに $\frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{2^{f(n)}}$,

$$n - m + 1 = n - (m - 1) < 2^{f(n)+1} - 2^{f(n)} = 2^{f(n)}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &< \underbrace{\frac{1}{2^{f(n)}} + \frac{1}{2^{f(n)}} + \cdots + \frac{1}{2^{f(n)}}}_{(n-m+1) \text{ 個}} \\ &= \frac{n-m+1}{2^{f(n)}} < 1 \end{aligned}$$

$S_{m,n} > 0$ であるから, $0 < S_{m,n} < 1$ より, $S_{m,n}$ は整数ではない.

(I), (II) から, $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならない. ■