平成25年度　千葉大学　2次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (中学数学を除く) $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・教育 (情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム (物理化学・生命科学・人間科学) $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90分) 数 I・II・A・B
- 教育 (中学数学) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (150分) 数 I・II・A・B
- 先進科学プログラム (物理・電気電子・ナノサイエンス・画像科学・情報画像) $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ (120分) 数 I・II・III・A・B
- 理 (物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・ $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ (120分) 数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ (120分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{10}$ (180分) 数 I・II・III・A・B・C

1 a，b を正の整数とする．このとき，関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える．

(1) 共有点が3個になるような $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

(2) 共有点が1個になるような $(a,\ b)$ の組のうち，b が最小になるものを求めよ．

2 a，b を100以下の正の整数とする．2つの分数 $\dfrac{a}{27}$，$\dfrac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり，かつ，和 $\dfrac{a}{27} + \dfrac{31}{b}$ が整数であるとする．このような $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

3 1辺の長さが3の正四面体 OABC において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする．また，辺 OC 上に点 E をとり，CE $= t$ とする．

(1) AD の長さを求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ．

4 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある．これらを無作為に1列に並べる試行を行う．

(1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ．

(2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ．

(3) 条件 (A)，(B) が同時に成り立つ確率を求めよ．

ただし，条件 (A)，(B) は次のとおりである．

(A) 番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない．

(B) 番号8のカードと番号9のカードの間には，ちょうど1枚のカードがある．

5 a，b を実数とし，$a>0$ とする．放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に2点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる．点Aにおける放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_{A} と n_{A}，点Bにおける放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_{B} と n_{B} とおいたとき，ℓ_{A} と ℓ_{B} が直交しているものとする．2つの接線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の交点をPとし，2つの法線 n_{A}，n_{B} の交点をQとする．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) P，Qの座標を a を用いて表せ．

(3) 長方形AQBPの面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ．

6 整数 p，q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して2項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0!=1$ とする．

(1) n，k が0以上の整数のとき，

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right) $$

を計算し，n によらない値になることを示せ．

(2) m が3以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ．

7 a は0でない実数とする．直線 $y=ax$ と曲線 $y=x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{8}$ r を 1 より大きい実数とする．半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる．最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0,\ 1)$，点 Q は $(0,\ 2)$ にあるものとし，円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく．角 θ ラジアンだけ回転したとき，半直線 PQ 上に $\mathrm{PR}=r$ となる点 R をとる．θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える．

(1) $\alpha,\ \beta$ は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ をみたし，$\theta=\alpha$ のときの R の座標と $\theta=\beta$ のときの R の座標とが一致するものとする．$t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくとき，r を t を用いて表せ．

(2) (1) において，θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする．S を t を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}$ を求めよ．

$\boxed{9}$ m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ．

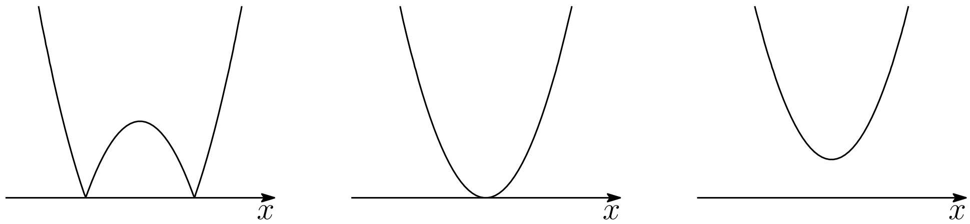
$\boxed{10}$ $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$ を示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = \left| x^2 - ax + \dfrac{a^2}{2} - 5 \right| = \left| \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} - 5 \right| \quad \cdots (*)$

したがって，このグラフの x 軸との位置関係は次のようになる．

(i) $\frac{a^2}{4} - 5 < 0$　　ii) $\frac{a^2}{4} - 5 = 0$　　(iii) $\frac{a^2}{4} - 5 > 0$



このグラフと直線 $y = b$ の共有点が 3 個であるのは，(i) の場合で，直線 $y = b$ が曲線と点 $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4} + 5\right)$ で接するときであるから

$$b = -\frac{a^2}{4} + 5$$

よって，これを満たす正の整数 a，b は　$\boldsymbol{(a,\ b) = (2,\ 4),\ (4,\ 1)}$

(2) a は正の整数であるから，グラフ $(*)$ が (ii) のように，x 軸と接することはない．

グラフ $(*)$ と直線 $y = b$ の共有点が 1 個であるのは，(iii) の場合で，直線 $y = b$ が曲線 $(*)$ と点 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4} - 5\right)$ で接するときであるから

$$b = \frac{a^2}{4} - 5$$

よって，b が最小となる正の整数 a，b は　$\boldsymbol{(a,\ b) = (6,\ 4)}$　■

2 $\dfrac{a}{27}+\dfrac{31}{b}=\dfrac{ab+27\cdot31}{27b}=m$ とおくと (m は整数)

$$ab+27\cdot31=27bm \quad ゆえに \quad ab=27(bm-31) \quad \cdots ①$$

a と 27 は互いに素であるから，b は 27 の倍数で，$1 \leqq b \leqq 100$ であるから

$$b=27k \quad (k=1,2,3)$$

とおける．これを ① に代入すると

$$27ak=27(27km-31) \quad ゆえに \quad k(27m-a)=31$$

k $(k=1,2,3)$ は 31 の因数であるから，$k=1$ より

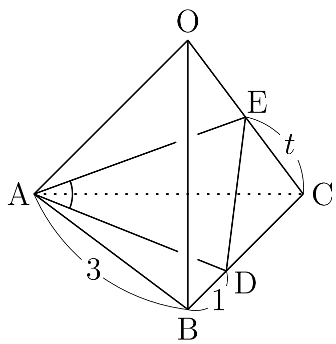
$$b=27, \quad a=27m-31$$

a は 27 と互いに素で，$1 \leqq a \leqq 100$ であるから　$m=2,\ 3,\ 4$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(23,\ 27),\ (50,\ 27),\ (77,\ 27)}$ ■

3 (1) D は線分 BC$(=3)$ を $1:2$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BD}=1$$



△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos60^\circ\\&=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=7\end{aligned}$$

$\mathrm{AD}>0$ より　$\boldsymbol{\mathrm{AD}=\sqrt{7}}$

(2) $\mathrm{CD}=\mathrm{AB}-\mathrm{BD}=3-1=2$．$\triangle\mathrm{CDE}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}^2&=\mathrm{CD}^2+\mathrm{CE}^2-2{\cdot}\mathrm{CD}{\cdot}\mathrm{CE}\cos 60^\circ\\&=2^2+t^2-2{\cdot}2{\cdot}t{\cdot}\frac{1}{2}\\&=t^2-2t+4\end{aligned}$$

$\mathrm{OE}=\mathrm{OC}-\mathrm{CE}=3-t$．$\triangle\mathrm{OAE}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AE}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OE}^2-2{\cdot}\mathrm{OA}{\cdot}\mathrm{OE}\cos 60^\circ\\&=3^2+(3-t)^2-2{\cdot}3(3-t){\cdot}\frac{1}{2}\\&=t^2-3t+9\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAE}&=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2-\mathrm{DE}^2}{2\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{AE}}\\&=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}\\&=\boldsymbol{\frac{12-t}{2\sqrt{7(t^2-3t+9)}}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sin^2\angle\mathrm{DAE}&=1-\cos^2\angle\mathrm{DAE}=1-\frac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}\\&=\frac{3(9t^2-20t+36)}{28(t^2-3t+9)}\end{aligned}$$

ゆえに
$$\sin\angle\mathrm{DAE}=\frac{\sqrt{3(9t^2-20t+36)}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{\sqrt{3(9t^2-20t+36)}}{2\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{AE}}$$

したがって
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADE}&=\frac{1}{2}\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{DAE}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2-20t+36}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{9}}\end{aligned}$$

$0<t<3$ に注意して，$\boldsymbol{t=\frac{10}{9}}$ のとき，最小値 $\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{224}{9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{3}}$ ■

4 (1) 番号1から番号9の9枚のカードの並べ方の総数は　9! (通り)
番号1，2のカードが隣り合うとき，これらをひとまとめにする．
ひとまとめの番号1，2のカードと残り7枚の並べ方は　8! (通り)
また，ひとまとめの番号1，2のカードの並べ方は　2! (通り)
したがって，番号1，2のカードが隣り合う確率は　$\dfrac{8!\cdot 2}{9!}=\dfrac{2}{9}$
求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{2}{9}=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

(2) 番号8と番号9のカードの間に1枚のカードがあるとき，これら3枚のカードをひとまとめにする．
ひとまとめの3枚のカードと残り6枚のカードの並べ方は　7!
ひとまとめの番号8，9のカードの並べ方は　2! (通り)
番号8，9のカードの間にカードが1枚入る場合の数は　7 (通り)
よって，求める確率は　$\dfrac{7!\cdot 2!\cdot 7}{9!}=\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(3) 条件 (A)，(B) を満たす確率をそれぞれ $P(\mathrm{A})$，$P(\mathrm{B})$ とすると

$$P(\mathrm{A})=\frac{7}{9},\quad P(\mathrm{B})=\frac{7}{36}$$

番号1，2が隣り合い，番号8，9のカードの間にカードが1枚入る確率は

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\frac{6!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 5}{9!}=\frac{5}{126}$$

よって，求める確率は

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(B)-P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\frac{7}{36}-\frac{5}{126}=\boldsymbol{\frac{13}{84}}$$

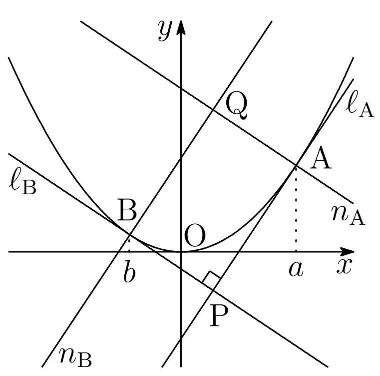
■

5 (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{x}{2}$
曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ における接線の傾きはそれぞれ

$$f'(a)=\frac{a}{2},\quad f'(b)=\frac{b}{2}$$

このとき，$f'(a)f'(b)=-1$ であるから

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1\quad よって\quad \boldsymbol{b=-\frac{4}{a}}$$



(2) ℓ_{A} は，点 $(a,\ f(a))$ を通り，傾き $f'(a)$ の直線であるから

$$y-\frac{a^2}{4}=\frac{a}{2}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}$$

同様に，ℓ_{B} の方程式は　$y=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$

ℓ_{A} と ℓ_{B} の連立方程式を解くと　$x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=\dfrac{ab}{4}$

よって，点 Q の座標は (1) の結果により　$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},-1\right)}$

n_{A} は，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{f'(a)}$ の直線であるから

$$y-\frac{a^2}{4}=-\frac{2}{a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{2}{a}x+\frac{a^2}{4}+2$$

同様に，n_{B} の方程式は　$y=-\dfrac{2}{b}x+\dfrac{b^2}{4}+2$

n_{A} と n_{B} の連立方程式を解くと　$x=-\dfrac{ab}{8}(a+b)$，$y=\dfrac{a^2+ab+b^2}{4}+2$

よって，点 Q の座標は (1) の結果により　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+1+\dfrac{4}{a^2}\right)}$

(3) P，Q の x 座標が等しいから　$\mathrm{PQ}=\dfrac{a^2}{4}+1+\dfrac{4}{a^2}-(-1)=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2$

A，B の x 座標の差は，$a>0$ に注意して　$a-b=a-\left(-\dfrac{4}{a}\right)=2\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}\right)$

したがって，長方形 AQBP の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2\cdot 2\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)=\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^3$$

2 つの正の数 $\dfrac{a}{2}$ と $\dfrac{2}{a}$ の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}}=2$$

上式おいて，等号が成立するとき　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{a}$　すなわち　$a=2$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき，S は最小値 **8** をとる． ■

6 (1)

$$\begin{aligned}
&{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) \\
&= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \left\{ \frac{k!n!}{(n+k)!} - \frac{k!(n+1)!}{(n+k+1)!} \right\} \\
&= \frac{1}{k+1}\{(n+k+1)-(n+1)\} = \boldsymbol{\frac{k}{k+1}}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}} = \frac{k+1}{k}\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$$

上式に $k=2$ を代入すると

$$\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right)$$

したがって，m が 3 以上の整数のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{m}\mathrm{C}_2} \right) \\
&= \frac{3}{2}\left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} = \boldsymbol{\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}}
\end{aligned}$$

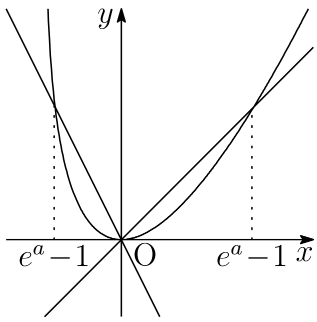
■

$\boxed{7}$ $y = x\log(x+1)$ より $(x > -1)$ $\quad y' = \log(x+1) + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

$$y'' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

したがって，曲線 $y = x\log(x+1)$ は下に凸である．

直線 $y = ax$ $(a \neq 0)$ と曲線 $y = x\log(x+1)$ の共有点の x 座標は



$$x\log(x+1) = ax$$

ゆえに $\quad x\{\log(x+1) - a\} = 0$

これを解いて $\quad x = 0,\ e^a - 1$

直線 $y = ax$ と曲線 $y = x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を S とする．

(i) $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^a-1} \{ax - x\log(x+1)\}dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2 + (x+1)\log(x+1) - x\right]_0^{e^a-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{e^{2a}}{4} - e^a + \frac{a}{2} + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

(ii) $a < 0$ のとき，(i) の結果により

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^a-1}^{0} \{ax - x\log(x+1)\}dx \\ &= -\int_0^{e^a-1} \{ax - x\log(x+1)\}dx \\ &= \boldsymbol{-\frac{e^{2a}}{4} + e^a - \frac{a}{2} - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

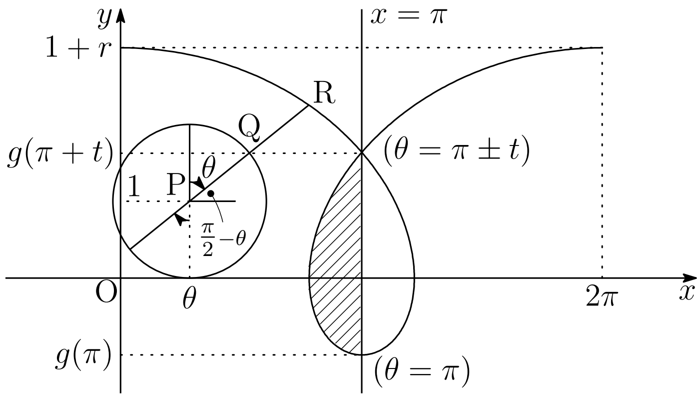
補足

$$\begin{aligned} \int x\log(x+1)\,dx &= \int \{(x+1)\log(x+1) - \log(x+1)\}dx \\ &= \int \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}'\log(x+1)\,dx - \int (x+1)'\log(x+1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 - (x+1)\log x + x + C \end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = r\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} \theta + r\sin\theta \\ 1 + r\cos\theta \end{pmatrix}$



$\theta = \alpha$ のときと $\theta = \beta$ のときの R の座標が一致するから

$$\alpha + r\sin\alpha = \beta + r\sin\beta,\quad 1 + r\cos\alpha = 1 + r\cos\beta \qquad (*)$$

上の第 2 式から $(r \neq 0)$　$\cos\alpha = \cos\beta$　このとき，$0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ より
($y = \cos x$ のグラフは，直線 $x = \pi$ に関して対称)

$$\beta + \alpha = 2\pi \quad \cdots ①$$

また，$t = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ より　$\beta - \alpha = 2t \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$\alpha = \pi - t$，$\beta = \pi + t$

これらを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$\pi - t + r\sin(\pi - t) = \pi + t + r\sin(\pi + t) \quad \text{ゆえに} \quad r\sin t = t \qquad (**)$$

$0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$，$t = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ より　$0 < t \leqq \pi$

$t = \pi$ のとき，$\alpha = 0$，$\beta = 2\pi$ となり，これは $(*)$ の第 1 式を満たさない．

したがって，$0 < t < \pi$　よって，$(**)$ より　$\boldsymbol{r = \dfrac{t}{\sin t}}$

(2) 点Rの座標 $(x,\ y)$ を $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおくと

$$f(\theta)=\theta+r\sin\theta,\quad g(\theta)=1+r\cos\theta$$

このとき　$f(\pi+\theta)+f(\pi-\theta)=2\pi$，$g(\pi+\theta)=g(\pi-\theta)$

したがって，Rの描く軌跡は，直線 $x=\pi$ に関して対称である．

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2}&=\int_{g(\pi)}^{g(\pi+t)}(\pi-x)\,dy\\
&=\int_{\pi}^{\pi+t}\{\pi-f(\theta)\}g'(\theta)d\theta\\
&=\int_{\pi}^{\pi+t}(\pi-\theta-r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta\\
&=r\int_{\pi}^{\pi+t}(-\pi\sin\theta+\theta\sin\theta)d\theta+r^2\int_{\pi}^{\pi+t}\sin^2\theta\,d\theta\\
&=r\Big[\ \pi\cos\theta-\theta\cos\theta+\sin\theta\ \Big]_{\pi}^{\pi+t}+r^2\Big[\ \frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\ \Big]_{\pi}^{\pi+t}\\
&=r(t\cos t-\sin t)+r^2\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right) \qquad \text{(A)}\\
&=\frac{t}{\sin t}(t\cos t-\sin t)+\frac{t^2}{\sin^2 t}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)\\
&=\frac{t^2\cos t}{2\sin t}+\frac{t^3}{2\sin^2 t}-t
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{t^2\cos t}{\sin t}+\dfrac{t^3}{\sin^2 t}-2t}$

(3) (A) より　$\dfrac{S}{r^2}=\dfrac{2}{r}(t\cos t-\sin t)+t-\dfrac{1}{2}\sin 2t$

$r\to\infty$ のとき，(1) の結果から　$t\to\pi$　よって，上式より

$$\boldsymbol{\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}=\pi}$$

■

9 $m^4+14m^2=m^2(m^2+14)$

m と $2m+1$ は互いに素であるから，m^2+14 は $2m+1$ で割り切れる．

$2m+1$ は奇数であるから，$4(m^2+14)$ が $2m+1$ で割り切れる整数 m を求めればよい．$4(m^2+14)=(2m+1)(2m-1)+57$ より

$$\frac{4(m^2+14)}{2m+1}=2m-1+\frac{57}{2m+1}$$

このとき，上式の左辺が整数であるから

$$2m+1=-57,-19,-3,-1,\ 1,\ 3,\ 19,\ 57$$

よって　　$\boldsymbol{m=-29,-10,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28}$ ■

10 $\tan 10^\circ = x$ とおくと

$$\tan 20^\circ=\tan(30^\circ-10^\circ)=\frac{\tan 30^\circ-\tan 10^\circ}{1+\tan 30^\circ\tan 10^\circ}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-x}{1+\dfrac{x}{\sqrt{3}}}=\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{3}+x}$$

$$\tan 40^\circ=\tan(30^\circ+10^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 10^\circ}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{3}}}=\frac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}-x}$$

上の 2 式の辺々を掛けると

$$\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\frac{(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)}=\frac{1-3x^2}{3-x^2} \qquad (*)$$

$\tan 20^\circ=\dfrac{2\tan 10^\circ}{1-\tan^2 10^\circ}=\dfrac{2x}{1-x^2}$ より

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ=\tan(20^\circ+10^\circ)&=\frac{\tan 20^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 10^\circ}\\&=\frac{\dfrac{2x}{1-x^2}+x}{1-\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot x}=\frac{x(3-x^2)}{1-3x^2} \qquad (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ の辺々を掛けると

$$\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 40^\circ=\frac{1-3x^2}{3-x^2}\times\frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}=x=\tan 10^\circ$$

■