平成24年度　千葉大学　2次試験前期日程(数学問題)

- 教育学部(中学数学を除く) $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ (90分) 数I・A
- 文(行動科学)・教育(情報教育分野)・法政経済・園芸学部・先進科学プログラム(物理化学・生命科学・人間科学) $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (90分) 数I・II・A・B
- 教育(中学数学) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (150分) 数I・II・A・B
- 先進科学プログラム(物理・電気電子・ナノサイエンス・画像科学・情報画像) $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ (120分) 数I・II・III・A・B
- 理(物理・化学・生物・地球科学)・薬・工・ $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ (120分) 数I・II・III・A・B・C
- 医学部 $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ (120分) 数I・II・III・A・B・C
- 理学部(数学・情報数理) $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ (180分) 数I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ a を実数の定数とする．放物線 $y = x^2 - ax + a$ が x 軸の

$$1 \leqq x \leqq 2 \quad \text{または} \quad 3 \leqq x \leqq 4$$

を満たす部分と2つの異なる共有点を持つための a の条件を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 7$，$\mathrm{CA} = 8$ および $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = t$ を満たす四面体OABCがある．

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

(3) 4つの頂点O，A，B，Cが同一球面上にあるとき，その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ．

$\boxed{3}$ さいころを7回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする．

(1) 積 X_1X_2 が18以下である確率を求めよ．

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ．

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が4の倍数である確率を求めよ．

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を3で割ったときの余りが1である確率を求めよ．

4 p，q を互いに素な 2 以上の整数，m，n は $m < n$ なる正の整数とする．このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ．

5 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を ℓ_a とする．

(1) 直線 ℓ_a が不等式

$$y > -x^2 + 2x - 5$$

の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，直線 ℓ_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ．

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} (y-x^2)(y+x^2-2x+5) \leqq 0 \\ y(y+5) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を E とする．D と E の共通部分の面積を求めよ．

6 1 より小さい正の実数 a に対して

$$\text{円 } C(a):\ (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$$

と定める．その上で，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める．

(i) $n = 1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする．さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく．

(ii) $n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする．さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_2 を求めよ．

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

7 横 $2a$，縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる．回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ．ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする．また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下に取るものとする．

8 すべての項が整数である数列を整数列という．p，q，r，s を実数とし，正の整数 n に対し

$$a_n = p + qn + rn^2, \quad b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく．このとき以下の命題を示せ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である．

(2) 整数 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである．

9 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a < b$ に対して，$f'(a) = f'(b) = 0$ を満たしているものとする．このとき

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x \right) f''(x)\, dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 直線道路上における車の走行を考える．ある信号で停止していた車が，時刻 0 で発進後，距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した．この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ．

10 さいころを n 回 $(n \geqq 2)$ 投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に出る目を X_k とする．

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ．

(2) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ．

(3) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ．

(4) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ．

11 xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\ 0)$ に重なるように置く．点 A を y 軸に沿って点 $(0,\ 1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる．このとき線分 AB が通る領域を D とする．$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\ y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする．

(1) $f(x)$ を x の式で表せ．

(2) 領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ．

12 $\ell,\ n,\ d$ を自然数とする．このとき自然数の積 $(2\ell+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2\ell+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=x^2-ax+a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$ とおく．

$y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 つの共有点をもつとき

$$-\frac{a^2}{4}+a<0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-4)>0 \quad \text{すなわち} \quad a<0,\ 4<a$$

$y=f(x)$ は点 $(1,\ 1)$ を通り，軸が $x=\dfrac{a}{2}$ の下に凸の放物線．

この放物線が x 軸の $1\leqq x\leqq 2$ または $3\leqq x\leqq 4$ の異なる 2 点を通るとき，軸の式から，$a<0$ は不適．したがって，$a>4\cdots$ ① より

$$f(2)=4-a<0$$

これから，$y=f(x)$ は，x 軸と $1\leqq x\leqq 2$ の範囲にただ 1 つの共有点をもつ．

条件を満たすとき，$y=f(x)$ は，x 軸と $3\leqq x\leqq 4$ で共有点を 1 つもつから

$$f(3)\leqq 0, \quad f(4)\geqq 0$$

したがって　$-2a+9\leqq 0, \quad -3a+16\geqq 0$　すなわち　$\dfrac{9}{2}\leqq a\leqq\dfrac{16}{3}$

求める a の条件は，上式および ① を同時に満たす範囲であるから

$$\boldsymbol{\frac{9}{2}\leqq a\leqq\frac{16}{3}}$$

■

2 (1) △ABC に余弦定理を適用すると

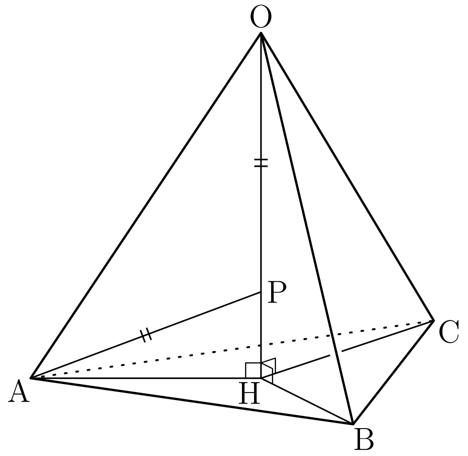
$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}}$

(2) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=\frac{7}{\sin\frac{\pi}{3}}\quad\text{よって}\quad R=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

(3) O から平面 ABC に垂線 OH を引くと，OA = OB = OC より



$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$$

AH = BH = CH であり，H は △ABC の外心である．また，直線 OH 上に

$$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}$$

となる点 P をとると

$$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$$

ゆえに，P は 4 点 O，A，B，C を通る球の中心である．OP = AP = x，OH = h とおき，△OAH，△PAH に三平方定理を適用すると

$$(*)\begin{cases} t^2=R^2+h^2 \\ x^2=R^2+|h-x|^2 \end{cases}$$

上の 2 式から　$2hx=R^2+h^2=t^2$　ゆえに　$x=\dfrac{t^2}{2h}$

$(*)$ の第 1 式より，$h=\sqrt{t^2-R^2}$．相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x=\frac{t^2}{2\sqrt{t^2-R^2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2-R^2}+\frac{R^2}{\sqrt{t^2-R^2}}\right)\geqq R$$

上式で等号が成立するとき　$\sqrt{t^2-R^2}=\dfrac{R^2}{\sqrt{t^2-R^2}}$　すなわち　$t=\sqrt{2}R$

よって，求める t の値は　$t=\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{6}}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $X_1X_2 > 18$ となる $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の 8 通り．

$$\begin{aligned}(X_1,\ X_2) =&(4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\\ &(5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\end{aligned}$$

したがって，$X_1X_2 > 18$ となる確率は $\dfrac{8}{6^2} = \dfrac{2}{9}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1 - \dfrac{2}{9} = \boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が奇数であるのは，$X_1,\ X_2, \cdots, X_7$ がすべて奇数である．その確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1 - \dfrac{1}{128} = \boldsymbol{\dfrac{127}{128}}$

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数であり，4 の倍数でないのは，$X_1,\ X_2, \cdots, X_7$ の 1 つだけが 2 または 6 で，それ以外は奇数である．その確率は

$${}_7\mathrm{C}_1\cdot\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^6 = \frac{14}{3\cdot128}$$

これと (2) の結果から，求める確率は $\dfrac{127}{128} - \dfrac{14}{3\cdot128} = \boldsymbol{\dfrac{367}{384}}$

(4) 法 3 について $1 \equiv 4,\quad 2 \equiv 5 \equiv -1,\quad 3 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 3$

$A = \{1,\ 4\}$，$B = \{2,\ 5\}$ とする．$X_1X_2\cdots X_7 \equiv 1 \pmod 3$ であるのは，$X_1,\ X_2, \cdots, X_7$ が，奇数個の A と偶数個の B の場合である．その確率は

$$({}_7\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_6)\left(\frac{2}{6}\right)^7 = (1 + 21 + 35 + 7)\cdot\frac{1}{2187} = \boldsymbol{\frac{64}{2187}}$$

補足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_k = 2^7$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_k(-1)^k = 0$ より

$${}_7\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_6 = 2^6$$

■

4 n 以下の分数で分子が $p,\ q,\ pq$ で割り切れるものの個数は，それぞれ

$$\frac{np^2q^2}{p},\quad \frac{np^2q^2}{q},\quad \frac{np^2q^2}{pq}$$

n 以下の分数で分子が p でも q でも割り切れないものの個数は

$$np^2q^2-\left(\frac{np^2q^2}{p}+\frac{np^2q^2}{q}-\frac{np^2q^2}{pq}\right)=npq(p-1)(q-1)$$

同様に，m 以下の分数で分子が p でも q でも割り切れないものの個数は

$$mpq(p-1)(q-1)$$

m より大きく n 以下の分数で分子が p でも q でも割り切れないものの個数は

$$npq(p-1)(q-1)-mpq(p-1)(q-1)$$

整数 n は，上に示した個数に含まれないから，求める個数は

$$\boldsymbol{(n-m)pq(p-1)(q-1)}$$

■

5 (1) $y=x^2$ より　$y'=2x$

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 ℓ_a の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad すなわち\quad y=2ax-a^2$$

直線 ℓ_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域にある，すなわち，直線 ℓ_a と放物線 $y=-x^2+2x-5$ と共有点をもたないことであるから，ℓ_a とこの放物線の方程式から y を消去すると

$$2ax-a^2=-x^2+2x-5\quad ゆえに\quad x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$$

上の第 2 式の判別式を D とすると

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)<0\quad ゆえに\quad (a+1)(a-2)<0$$

よって　　$\boldsymbol{-1<a<2}$

(2) 接線 ℓ_a の方程式から　$a^2 - 2xa + y = 0 \quad \cdots(*)$

a に関する 2 次方程式 $(*)$ が，$-1 < a < 2$ の範囲に解をもたない $(x,\ y)$ の条件を求めればよい．$f(a) = a^2 - 2xa + y$ とおくと

$$f(a) = (a - x)^2 - x^2 + y$$

(I) $-x^2 + y > 0$，すなわち，$y > x^2$ のとき

$f(a) = 0$ は実数解をもたないので，条件を満たす．

(II) $-x^2 + y \leqq 0$，すなわち，$y \leqq x^2$ のとき

(i) $x \leqq -1$ のとき，$f(-1) \geqq 0$　または　$f(2) \leqq 0$

ゆえに　　$2x + y + 1 \geqq 0$　または　$-4x + y + 4 \leqq 0$

すなわち　$y \geqq -2x - 1$　または　$y \leqq 4x - 4$

(ii) $-1 < x < 2$ のとき，$f(-1) \leqq 0$　かつ　$f(2) \leqq 0$

ゆえに　　$2x + y + 1 \leqq 0$　かつ　$-4x + y + 4 \leqq 0$

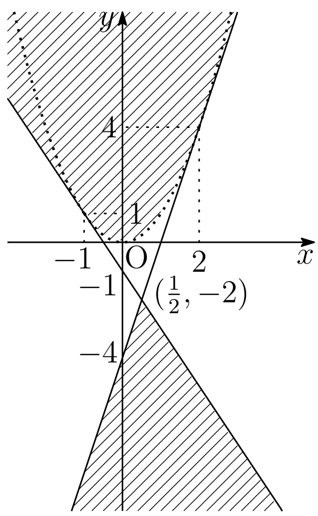
すなわち　$y \leqq -2x - 1$　かつ　$y \leqq 4x - 4$

(iii) $2 \leqq x$ のとき，$f(-1) \leqq 0$　または　$f(2) \geqq 0$

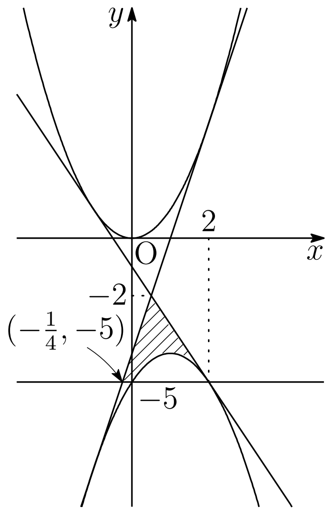
ゆえに　　$2x + y + 1 \leqq 0$　または　$-4x + y + 4 \geqq 0$

すなわち　$y \leqq -2x - 1$　または　$y \geqq 4x - 4$

(I) または (II) を満たす領域であるから，点 $(x,\ y)$ の表す領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，$-1 < x < 2$ における放物線上の点は含まない．



(3) $E:\begin{cases}(y-x^2)(y+x^2-2x+5) \leqq 0 & \cdots ① \\ y(y+5) \leqq 0 & \cdots ②\end{cases}$



$-x^2+2x-5 < x^2$ であるから，① より

$$y-x^2 \leqq 0 \leqq y+x^2-2x+5$$

ゆえに　$-x^2+2x-5 \leqq y \leqq x^2 \quad \cdots ①'$

② より　$-5 \leqq y \leqq 0 \quad \cdots ②'$

①′，②′ より，E の表す領域は

$$\begin{cases}-x^2+2x-5 \leqq y \leqq x^2 \\ -5 \leqq y \leqq 0\end{cases}$$

$D \cap E$ の表す領域は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\{-2-(-5)\} - \int_0^2 \{(-x^2+2x-5)-(-5)\}dx \\ &= \frac{27}{8} + \int_0^2 x(x-2)\,dx \\ &= \frac{27}{8} - \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \boldsymbol{\frac{49}{24}}\end{aligned}$$

■

6 (1) $0 < a < 1$ である円

$$C(a) : (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$$

の中心 $(1-a,\ 1-a)$ は第 1 象限にあり，半径は $\sqrt{2}a$.
円 $C(a_1)$ は x 軸に接するから

$$1-a_1 = \sqrt{2}a_1 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a_1 = \sqrt{2}-1}$$

(2) $|a_2-a_1| = \sqrt{2}a_2$ であるから，$a_2 - a_1 = \pm\sqrt{2}a_2$ より

$$(1 \mp \sqrt{2})a_2 = a_1 \quad -a_2 = (1 \pm \sqrt{2})a_1 \quad (複号同順)$$

ゆえに　$a_2 = (\mp\sqrt{2}-1)a_1$

$0 < a_2 < 1$ により　$a_2 = (\sqrt{2}-1)a_1 = (\sqrt{2}-1)^2 = \boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$

(3) $|a_n - a_{n-1}| = \sqrt{2}a_n$ であるから，(2) と同様に

$$a_n = (\sqrt{2}-1)a_{n-1} \quad よって \quad a_n = (\sqrt{2}-1)^{n-1}a_1 = \boldsymbol{(\sqrt{2}-1)^n}$$

■

$\boxed{7}$ $\mathrm{AB}=2a$，$\mathrm{BC}=2b$，2辺BC，CDの中点をそれぞれM，Nとし，長方形ABCDを図のように対角線の交点Oを中心にθだけ回転させたものを長方形A′B′C′D′とする．このとき，辺B′C′と2辺BC，CDとの交点をそれぞれE，Fとし，辺C′D′と2辺CD，DAとの交点をそれぞれG，Hとする．$\mathrm{OM}=a$，$\mathrm{ON}=b$，$\angle\mathrm{EOM}=\angle\mathrm{GON}=\dfrac{\theta}{2}$であるから，$\mathrm{EM}=a\tan\dfrac{\theta}{2}$，　$\mathrm{GN}=b\tan\dfrac{\theta}{2}$

ゆえに　$\mathrm{CE}=\mathrm{CM}-\mathrm{EM}=b-a\tan\dfrac{\theta}{2}$，　$\mathrm{DG}=\mathrm{DN}-\mathrm{GN}=a-b\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{FEC}=\angle\mathrm{HGD}=\theta$であるから　$\mathrm{CF}=\mathrm{CE}\tan\theta$，　$\mathrm{DH}=\mathrm{DG}\tan\theta$

$\triangle\mathrm{CEF}$，$\triangle\mathrm{DGH}$の面積をそれぞれS_1，S_2とし，求める面積をSとすると

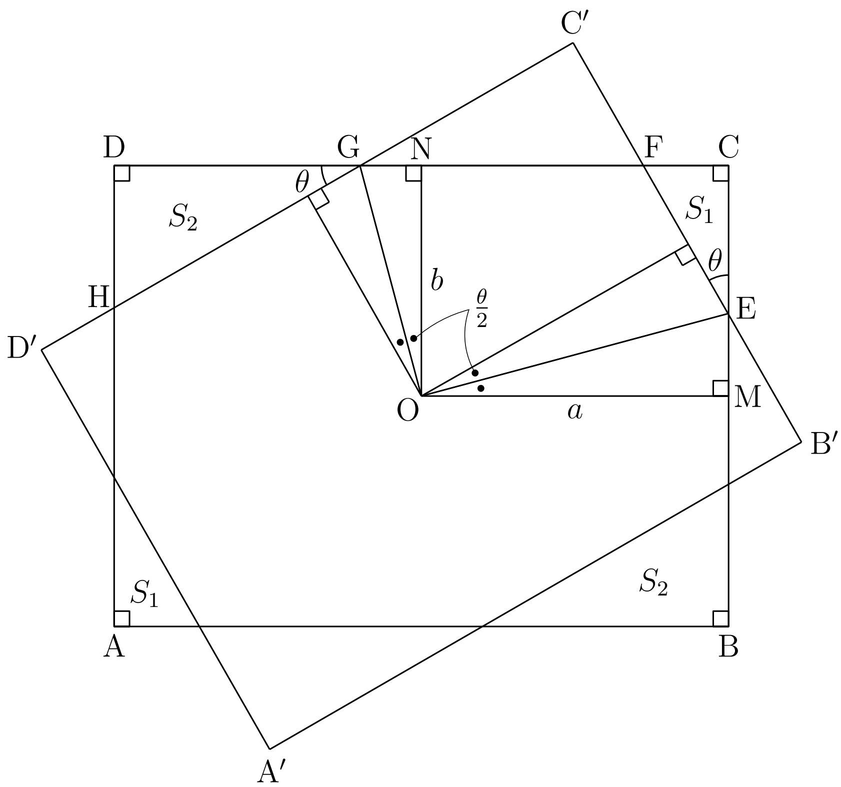
$$S_1=\triangle\mathrm{CEF}=\frac{1}{2}\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CF}=\frac{1}{2}\mathrm{CE}^2\tan\theta=\frac{1}{2}\left(b-a\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\tan\theta$$

$$S_2=\triangle\mathrm{DGH}=\frac{1}{2}\mathrm{DG}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{2}\mathrm{DG}^2\tan\theta=\frac{1}{2}\left(a-b\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\tan\theta$$

$a>b$のとき$\angle\mathrm{BOC}<\dfrac{\pi}{2}$，$a<b$のとき$\angle\mathrm{COD}<\dfrac{\pi}{2}$より，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$$S=2a\cdot2b-2(S_1+S_2)=\boldsymbol{4ab-\left\{\left(b-a\tan\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(a-b\tan\frac{\theta}{2}\right)\right\}\tan\theta}$$

$a=b$のとき，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$で$S$は上式，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$で　$S=\boldsymbol{4a^2}$



$\boxed{8}$ (1) $a_n = p + qn + rn^2$ より

$$a_{n+1} - a_n = q + r(2n+1),\quad a_{n+2} - a_{n+1} = q + r(2n+3)$$

上の 2 式から　　$(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 2r$

数列 $\{a_n\}$ が整数列であるから，$a_{n+2} - a_{n+1}$，$a_{n+1} - a_n$ は整数である．
よって，$2r$ は整数である．

補足 $\{a_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r$ と $2r$ がいずれも整数となることである．

(必要性) (1) の結果から，$2r$ は整数．

$$a_{n+1} - a_n - 2rn = q + r \quad (n \text{ は正の整数})$$

の左辺は整数であるから，$q+r$ は整数．$a_1 - (q+r) = p$ より，p は整数．
(十分性) $a_1 = p + (q+r)$ は整数．正の整数 n について

$$a_{n+1} - a_n = (q+r) + 2rn \quad (n \text{ は正の整数})$$

は整数．よって，$\{a_n\}$ は整数列．

(2) (必要性) $b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$ より

$$b_{n+1} - b_n = q + r(2n+1) + s(3n^2+3n+1) \quad \cdots ①$$
$$b_{n+2} - b_{n+1} = q + r(2n+3) + s(3n^2+9n+7)$$

$c_n = (b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n)$ とおくと，$\{c_n\}$ は整数列．

$$c_n = 2r + 6s(n+1) \quad \cdots ②$$
$$c_{n+1} = 2r + 6s(n+2)$$

上の 2 式から　$c_{n+1} - c_n = 6s$　ゆえに，$6s$ は整数
② より，$2r = c_n - 6s(n+1)$ であるから，$2r$ は整数
① より　$q + r + s = b_{n+1} - b_n - 2rn - 6s\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$
$\dfrac{1}{2}n(n+1)$ が整数であるから，$q+r+s$ は整数
$p = b_1 - (q+r+s)$ より，p は整数

(十分性) $b_1 = p + (q+r+s)$ は整数．

$$b_{n+1} - b_n = (q+r+s) + 2rn + 6s\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \quad (n \text{ は正の整数})$$

は整数であるから，$\{b_n\}$ は整数列である．■

9 (1) $f'(a)=f'(b)=0$ より

$$
\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= \int_a^b f'(x)\,dx = -\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)' f'(x)\,dx \\
&= -\left[\ \left(\frac{a+b}{2}-x\right) f'(x)\ \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right) f''(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right) f''(x)\,dx
\end{aligned}
$$

(2) $f(t)$ を車の走行距離を表す関数とし，$f(0)=0$，$f(T)=L$ とする．
これを (1) の結果に適用すると

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^T \left(\frac{T}{2}-t\right) f''(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2}-t\right) f''(t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \left(\frac{T}{2}-t\right) f''(t)\,dt \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$M=\max\limits_{0 \leqq t \leqq T} |f''(t)|$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2}-t\right) f''(t)\,dt &\leqq \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2}-t\right) M\,dt \\
&= M\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}-t\right)^2\ \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{MT^2}{8} \qquad \text{(A)} \\
\int_{\frac{T}{2}}^T \left(\frac{T}{2}-t\right) f''(t)\,dt &= \int_{\frac{T}{2}}^T \left(t-\frac{T}{2}\right) \{-f''(t)\}\,dt \\
&\leqq \int_{\frac{T}{2}}^T \left(t-\frac{T}{2}\right) M\,dt \\
&= M\left[\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{T}{2}\right)^2\ \right]_{\frac{T}{2}}^T = \frac{MT^2}{8} \qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

$(*)$，(A)，(B) より

$$
L \leqq \frac{MT^2}{8} + \frac{MT^2}{8} \quad \text{ゆえに} \quad M \geqq \frac{4L}{T^2}
$$

M は時刻 $0 \leqq t \leqq T$ における加速度の絶対値の最大値であるから，題意は成立する． ■

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $X_1X_2>18$ となる $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の 8 通り．

$$\begin{aligned}(X_1,\ X_2)=&(4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\\&(5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\end{aligned}$$

したがって，$X_1X_2>18$ となる確率は　$\dfrac{8}{6^2}=\dfrac{2}{9}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{2}{9}=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が奇数であるのは，$X_1,\ X_2,\cdots,X_n$ がすべて奇数であり，その確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\dfrac{1}{2^n}}$

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が偶数であり，4 の倍数でないのは，$X_1,\ X_2,\cdots,X_n$ の 1 つだけが 2 または 6 で，それ以外は奇数であり，その確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{3\cdot2^{n-1}}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{3\cdot2^{n-1}}=\boldsymbol{\frac{3\cdot2^n-2n-3}{3\cdot2^n}}$$

(4) 法 3 について　$1\equiv4,\quad 2\equiv5\equiv-1,\quad 3\equiv6\equiv0\pmod 3$

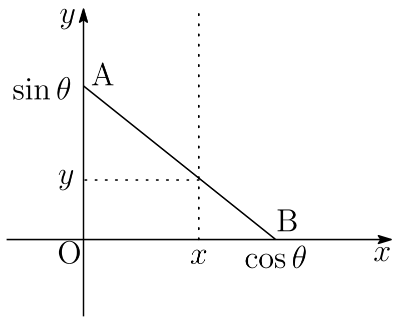
$A=\{1,\ 4\}$，$B=\{2,\ 5\}$ とする．$X_1X_2\cdots X_n\equiv1\pmod 3$ であるのは，$X_1,\ X_2,\cdots,X_n$ が，奇数個の A と偶数個の B の場合であり，$2l$ を n 以下の最大の偶数とすると，その確率は

$$({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{2l})\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{l}{}_n\mathrm{C}_{2k}$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k=0$ より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{l}{}_n\mathrm{C}_{2k}=2^{n-1}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{2^{n-1}}{3^n}}$　■

11 (1) 条件から，A$(0,\ \sin\theta)$，B$(\cos\theta,\ 0)$ とおく $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 点 A，B を通る直線の方程式は



$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1$$

x を固定し，y を θ の関数とすると

$$y = \sin\theta - x\tan\theta \qquad \cdots(*)$$

y を θ で微分すると

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \frac{x}{\cos^2\theta}$$

D の境界線上の点 $(x,\ y)$ において，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ であるから

$$\cos\theta - \frac{x}{\cos^2\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \cos^3\theta \qquad \cdots①$$

これを $(*)$ に代入すると

$$y = \sin\theta - \cos^3\theta\tan\theta = \sin^3\theta \qquad \cdots②$$

①，② より，D の境界線の方程式は $\quad (**)\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$

線分 AB 上の点について，$\theta = 0$ のとき $y = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $y = 1$ であるから，$(**)$ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で成立する．①，② から θ を消去すると [1]

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x) = (1 - x^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 f(x)^2\,dx = \pi\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^3\,dx \\ &= \pi\int_0^1 (1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2)\,dx \\ &= \pi\left[x - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{16}{105}\pi} \end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2016.pdf (p.14 を参照)

12 $(2\ell+1)nd=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$ の右辺について

$$\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}=ma+\frac{1}{2}m(m-1)$$

であるから

$$(2\ell+1)nd=ma+\frac{1}{2}m(m-1)$$

したがって，自然数 ℓ, n, d に対して，次式を満たす自然数 a と 2 以上の整数 m が存在することを示せばよい．

$$a=\left\{\frac{(2\ell+1)n}{m}-\frac{m-1}{2}\right\}d \qquad (*)$$

(i) $n>\ell$ のとき，$m=2\ell+1$ とおくと，$m \geqq 3$

$$a=(n-\ell)d \geqq d$$

(ii) $n \leqq \ell$ のとき，$m=2n$ とおくと，$m \geqq 2$

$$a=(\ell-n+1)d \geqq d$$

よって，$(*)$ を満たす自然数 a と 2 以上の整数 m が存在する． ■