平成 23 年度　千葉大学　２次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (数学科教育分野を除く) 1 2 3 4 (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・法経学部 1 2 5 6 (90 分) 数 I・II・A・B
- 園芸学部 2 5 6 7 (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (情報教育分野) 2 5 6 8 (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (数学科教育分野) 2 3 5 6 7 8 (150 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科，地球科学科)，工学部 (建築学科，都市環境システム学科，デザイン学科) 5 9 10 11 12 (120 分)
  数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科，化学科)，薬学部・工学部 (機械工学科，メディカルシステム工学科，電気電子工学科，ナノサイエンス学科，共生応用化学科，画像科学科，情報画像学科)，先進科学プログラム 9 10 11 12 13 (120 分)
  数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 10 12 13 14 15 (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) 7 9 10 11 12 13 (180 分)
  数 I・II・III・A・B・C

1 1 個のさいころを 3 回投げる．1 回目に出る目を a_1，2 回目に出る目を a_2，3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を

$$n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

と定める．

(1) $n = 0$ である確率を求めよ．

(2) $|n| = 30$ である確率を求めよ．

2 三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle \mathrm{BAC} = 60^\circ$，$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ である．このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ．

3 四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さ 2 の正方形で，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \sqrt{5}$$

である．

(1) 四角錐 OABCD の高さを求めよ．

(2) 四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ．

(3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ．

4 実数 x の関数 $f(x) = |x-1|(x-2)$ を考える．$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x+a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるかを調べよ．

5 a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ を考える．C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(\text{ただし } 0 < x < \dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく．また P と l との距離を d とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ．また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ．

6 三角形 ABC の外心を O，重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ．

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ．

7 n 人 $(n \geqq 3)$ でじゃんけんを 1 回行うとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ．

(2) あいこになる確率を求めよ．

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ．

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり，勝つ人数が 0 の場合である．

8 n 段の階段を上るのに，一歩で 1 段，2 段，または 3 段を上ることができるとする．この階段の上り方の総数を a_n とおく．たとえば，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ である．

(1) $a_4,\ a_5$ の値を求めよ．

(2) $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3}$ $(n \geqq 1)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) a_{10} の値を求めよ．

9 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする．座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ があり，その頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ \mathrm{C}_n,\ \mathrm{D}_n$ とする．さらに R_n は次の条件 (i)，(ii) を満たすとする．

(i) 正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である．

(ii) $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4$ の座標を r を用いて表せ．

(2) A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ とおく．$x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を $r,\ n$ の式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ．

10 三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ．

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ．

11 $f(x) = x\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$，$g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく．$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\}$ の値を求めよ．

12 $k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_k$ がある．千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する．最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ．

13 $a,\ b,\ c$ は実数とし，

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく．さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ と 2 つの虚数解をもち，

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する．

(1) $b,\ c$ を a を用いて表せ．

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ．

14 次の問いに答えよ．

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqq x + y + a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 $x,\ y$ に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ．

(2) 0 以上 1 以下の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して

$$abcd \leqq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ．

15 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - (3x^2-y^2)y = 0 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える $x,\ y$ の値を求めよ．

解答例

1 (1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ が互いに異なる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1-\dfrac{5}{9}=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

(2) $|a_1-a_2||a_2-a_3||a_3-a_1|=2\cdot3\cdot5$ より，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ は $\{1,\ 3,\ 6\}$ または $\{1,\ 4,\ 6\}$ であるから，求める確率は

$$\frac{2\cdot3!}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

■

2 $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB}$ とおくと，正弦定理により

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\cdot1$$

ゆえに，$\mathrm{BC}=a=\boldsymbol{\sqrt{3}},\quad b=2\sin B\cdots①,\quad c=2\sin C.$

$C=180^\circ-(A+B)=120^\circ-B$．また，$c>b$ より，$C>B$ であるから

$$120^\circ-B>B\quad これを解いて\quad B<60^\circ$$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned}c=a\cos B+b\cos A&=\sqrt{3}\cos B+(2\sin B)\cos 60^\circ\\&=\sqrt{3}\cos B+\sin B\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ より $\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ ゆえに $bc=\sqrt{3}+1\quad\cdots③$

③ の左辺について，①，② より

$$\begin{aligned}bc&=2\sin B(\sqrt{3}\cos B+\sin B)=2\sqrt{3}\sin B\cos B+2\sin^2 B\\&=\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B+1=2\sin(2B-30^\circ)+1\quad\cdots④\end{aligned}$$

$0^\circ<B<60^\circ$ より，$-30^\circ<2B-30^\circ<90^\circ$．③，④ より

$$\sin(2B-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ゆえに\quad 2B-30^\circ=60^\circ\quad すなわち\quad B=45^\circ$$

これを ①，② に代入して $\mathrm{CA}=b=\boldsymbol{\sqrt{2}},\ \mathrm{AB}=c=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

補足 加法定理により

$$\begin{aligned}c=2\sin C&=2\sin(120^\circ-B)\\&=2(\sin 120^\circ\cos B-\cos 120^\circ\sin B)\\&=\sqrt{3}\cos B+\sin B\end{aligned}$$

別解 余弦定理により　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$

$a = \sqrt{3}$，$bc = \sqrt{3} + 1 \cdots$ ③ より　$b^2 + c^2 = 4 + \sqrt{3}$

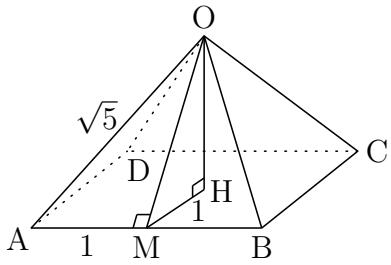
$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4 + \sqrt{3} + 2(\sqrt{3}+1) = 3(2+\sqrt{3})$$
$$(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 4 + \sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1) = 2 - \sqrt{3}$$

$b < c$ より

$$b + c = \sqrt{3(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$$
$$-b + c = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

上の 2 式から　　$b = \sqrt{2}$，$c = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ■

3 (1) 辺 AB の中点を M とし，O から底面 ABCD に垂線 OH を引くと



$$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{5-1} = 2$$
$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OM}^2 - \mathrm{MH}^2} = \sqrt{4-1} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(2) 四角錐 OABCD の表面積を T とすると

$$T = 2^2 + 4 \times \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 12$$

四角錐 OABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

四角錐 OABCD に内接する球の半径を r とすると，$\dfrac{1}{3}Tr = V$ より

$$\frac{1}{3}\cdot 12r = \frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \text{よって} \quad r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) (2) の結果から

球 S の表面積は　$4\pi r^2 = 4\pi\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$

球 S の体積は　　$\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9} = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi}$ ■

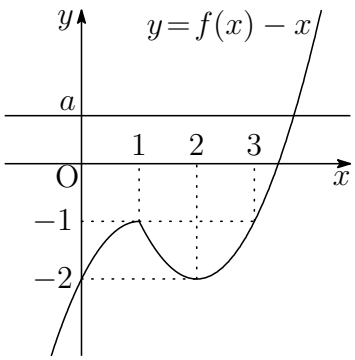
4 $y = f(x) = |x-1|(x-2)$ と $y = x + a$ の共有点の x 座標は

$$f(x) = x + a \quad \text{ゆえに} \quad f(x) - x = a$$

したがって，求める共有点の個数は，曲線 $y = f(x) - x$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい．

(i) $x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= -(x-1)(x-2) - x \\ &= -x^2 + 2x - 2 \\ &= -(x-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

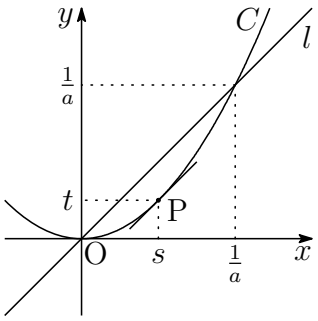


(ii) $1 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (x-1)(x-2) - x \\ &= x^2 - 4x + 2 \\ &= (x-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -2, -1 < a} \text{ のとき} & \textbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = -2, -1} \text{ のとき} & \textbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{-2 < a < -1} \text{ のとき} & \textbf{3} \text{ 個} \end{cases}$$
■

5 (1) 直線 $l : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ の共有点の x 座標は



$$ax^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad x(ax-1) = 0$$

これを解いて　$x = 0,\ \dfrac{1}{a}$

$y = ax^2$ を微分すると　$y' = 2ax$

C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と l の距離 d が最大となるとき，C 上の点 P における接線が l と平行，すなわち，接線の傾きが **1** であるから

$$2as = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{2a},\quad t = a\left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a}$$

このとき，$0 < s < \dfrac{1}{a}$ であることに注意して　$\boldsymbol{s = \dfrac{1}{2a},\ t = \dfrac{1}{4a}}$

したがって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{1}{4a}\right)$ から直線 $l : x - y = 0$ まで距離 d は $(a > 0)$

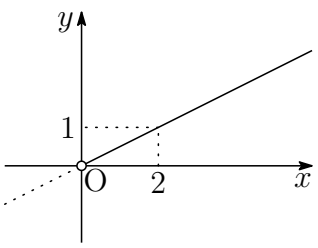
$$d = \frac{\left|\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{4a}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8a}}$$

別解 C 上の点 $(s,\ as^2)$ $\left(0 < s < \dfrac{1}{a}\right)$ から直線 $l : x - y = 0$ までの距離は

$$\frac{|s - as^2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-a\left(s - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a}\right|$$

$s = \dfrac{1}{2a}$，すなわち，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{1}{4a}\right)$ において，最大値 $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{4a} = \dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(2) (1) の結果から P の描く点 $(x,\ y)$ の軌跡は



$$x = \frac{1}{2a},\quad y = \frac{1}{4a} \quad (a > 0)$$

上の 2 式から，求める軌跡は，右図の

$$\textbf{半直線 } \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x \quad (x > 0)}$$

■

6 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，△ABC の外接円の半径を R とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ により

$$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\vec{a}\quad \text{ゆえに}\quad \vec{c}=-\vec{b}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(-\vec{b}-\vec{a})\\&=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=R^2-R^2=0\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって，△ABC は $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角三角形.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\left(k\neq\dfrac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}\quad \text{ゆえに}\quad (3k-1)\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}\quad\cdots(*)$$

したがって

$$\begin{aligned}(3k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}&=(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}\\&=|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=R^2+\vec{b}\cdot\vec{c}\quad\cdots①\\(3k-1)\vec{a}\cdot\vec{c}&=(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{c}\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+R^2\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② より　$(3k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=(3k-1)\vec{a}\cdot\vec{c}$

$3k-1\neq 0$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\quad\cdots(**)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=2R^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=2R^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

$(**)$ および上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

よって，△ABC は，AB = AC の二等辺三角形.　■

7 (1) 勝つ人の選び方 n 通りと手の出し方 3 通りより，その確率は

$$\frac{n\cdot 3}{3^n}=\boldsymbol{\frac{n}{3^{n-1}}}$$

(2) 勝負がつく，すなわち，n 人の出し方が 2 種類である確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)}{3^n}=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}}$$

(3) k 人が勝つ確率を $P(k)$ とすると $(1\leqq k\leqq n-1)$

$$P(k)={}_n\mathrm{C}_k\cdot 3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}}$$

したがって，求める期待値を E とすると

$$E=\sum_{k=1}^{n-1}kP(k)=\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k\quad\cdots(*)$$

ここで　$k\,{}_n\mathrm{C}_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)}=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k&=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k-n=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}-n\\&=n\cdot 2^{n-1}-n=n(2^{n-1}-1)\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より，求める期待値は　$E=\boldsymbol{\dfrac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}}$ ■

8 (1) 4段目に至る昇り方は，それぞれ，1段，2段，3段昇ってくる，すなわち，a_3 通り，a_2 通り，a_1 通りがある．$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ より

$$a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = \mathbf{7}$$

同様に $\quad a_5 = a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = \mathbf{13}$

(2) $n+3$ 段目に至る昇り方は，それぞれ，1段，2段，3段昇ってくる，すなわち，a_{n+2} 通り，a_{n+1} 通り，a_n 通りがあるから

$$\boldsymbol{a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n}$$

(3) (2) で求めた漸化式に順次 $n = 3, 4, 5, 6, 7$ を代入すると

$$\begin{aligned}
a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\
a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\
a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \mathbf{274}
\end{aligned}$$

■

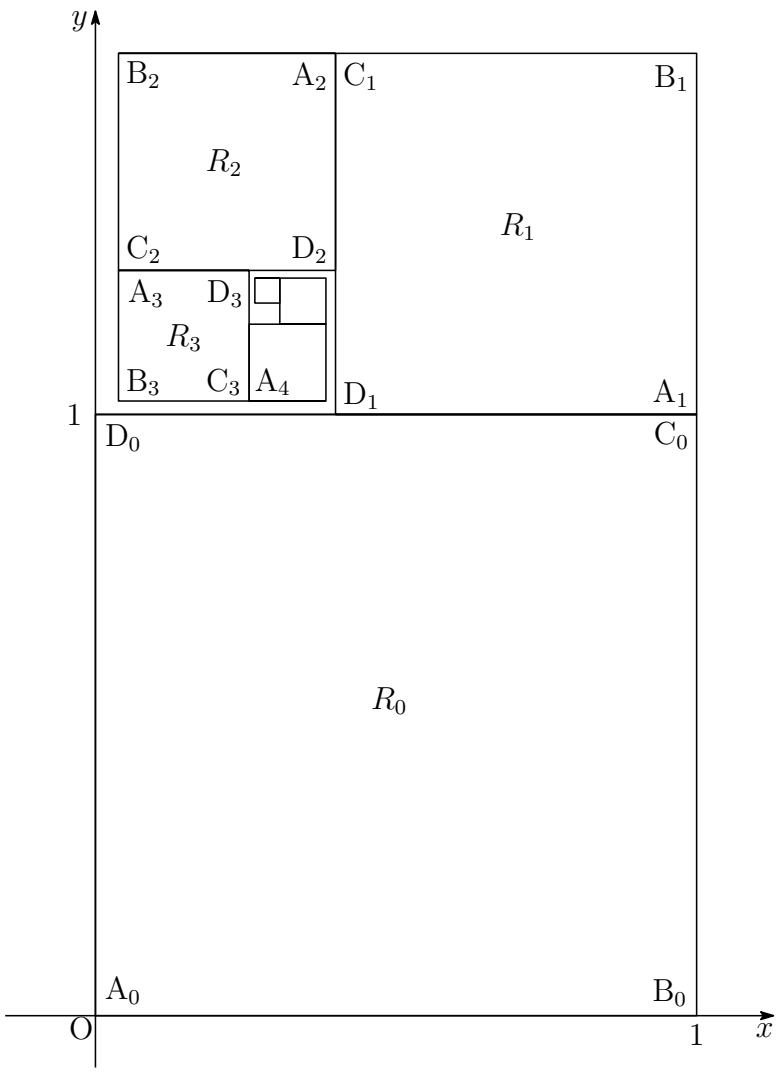
9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} = \begin{pmatrix} -r^2 \\ -r^2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}} = \begin{pmatrix} r^3 \\ -r^3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + \overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = \begin{pmatrix} 1-r \\ 1+r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = \begin{pmatrix} 1-r-r^2 \\ 1+r-r^2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_4}} = \begin{pmatrix} 1-r-r^2+r^3 \\ 1+r-r^2-r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r)(1-r)^2 \\ (1+r)^2(1-r) \end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{A_2(1-r,\ 1+r)}$, $\mathbf{A_3(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)}$,
$\mathbf{A_4((1+r)(1-r)^2,\ (1+r)^2(1-r))}$



(2) $\dfrac{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+1}}{\mathrm{OA}_1} = \dfrac{\mathrm{A}_{4n+1}\mathrm{A}_{4n+2}}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \dfrac{\mathrm{A}_{4n+2}\mathrm{A}_{4n+3}}{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = \dfrac{\mathrm{A}_{4n+3}\mathrm{A}_{4n+4}}{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = r^{4n}$

また，それぞれの線分の向きが同じであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+1}} = r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+1}\mathrm{A}_{4n+2}} = r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+2}\mathrm{A}_{4n+3}} = r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+3}\mathrm{A}_{4n+4}} = r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+4}} &= \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+1}} + \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+1}\mathrm{A}_{4n+2}} + \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+2}\mathrm{A}_{4n+3}} + \overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+3}\mathrm{A}_{4n+4}} \\ &= r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} + r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} \\ &= r^{4n}(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} + \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3}) = r^4\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+4}} = (x_{n+1} - x_n,\ y_{n+1} - y_n)$ より，上式および (1) の結果から

$$\boldsymbol{x_{n+1} - x_n = r^{4n}(1+r)(1-r)^2,}$$
$$\boldsymbol{y_{n+1} - y_n = r^{4n}(1+r)^2(1-r)}$$

(3) $x_0 = 0,\ y_0 = 0$，$0 < r < 1$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{4n}(1+r)(1-r)^2 \\ &= (1+r)(1-r)^2 \cdot \frac{1}{1-r^4} = \boldsymbol{\frac{1-r}{1+r^2}} \\ \lim_{n\to\infty} y_n &= y_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1} - y_n) \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{4n}(1+r)^2(1-r) \\ &= (1+r)^2(1-r) \cdot \frac{1}{1-r^4} = \boldsymbol{\frac{1+r}{1+r^2}}\end{aligned}$$

■

10 (1) $\boxed{6}$ (1) を参照.

(2) $\boxed{6}$ (2) を参照.

(3) $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2 &= |\vec{b} - \vec{i}|^2 - |\vec{c} - \vec{i}|^2 \\
&= (|\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{i} + |\vec{i}|^2) - (|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{i} + |\vec{i}|^2) \\
&= (R^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{i} + |\vec{i}|^2) - (R^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{i} + |\vec{i}|^2) \\
&= 2\vec{i}\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = 2\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0
\end{aligned}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{IB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IC}}|$

$\triangle$IBC は，IB=IC の二等辺三角形である．したがって

$$\angle\mathrm{IBC} = \angle\mathrm{ICB}$$

I は $\triangle$ABC の内心であるから

$$\angle\mathrm{ABC} = 2\angle\mathrm{IBC}, \quad \angle\mathrm{ACB} = 2\angle\mathrm{ICB}$$

上の諸式から　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$

よって，$\triangle$ABC は，AB = AC の二等辺三角形.　■

11 (1) $h(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とおくと，$h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$f(x)=xh(x)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 xh(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'h(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big[\,x^2h(x)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2h'(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h(1) = h(1) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$h(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ について，$t=\tan\theta$ とおくと

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+t^2$$

したがって　$h(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = h(1)-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$

(2) $A(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，$A(x)=xh(x)-\log(1+x^2)$ より

$$\begin{aligned}A(0)&=0\\ A'(x)&=h(x)+xh'(x)-\frac{2x}{1+x^2}\\ &=h(x)+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=h(x)-\frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

$h(0)=0$ より，$A'(0)=0$

$$\begin{aligned}A''(x)&=h'(x)-\frac{1(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\ &=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

$A'(x)$ は単調増加であるから　$x>0$ において $A'(x)>A'(0)=0$

さらに，$A(x)$ は単調増加であり　$x>0$ において $A(x)>A(0)=0$

よって，$x>0$ において　$f(x)>g(x)$

(3) $I = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(k^2+n^2) - 2\log n\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\} \\
&= \int_0^1 \log(x^2+1)\,dx = \int_0^1 (x)'\log(x^2+1)\,dx \\
&= \Big[\,x\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+1} \\
&= \log 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= \log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \log 2 - 2 + 2h(1) \\
&= \log 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2}
\end{aligned}$$

■

12 千葉君が n 回目 $(n \geqq 1)$ の移動後に，部屋 A_i にいる確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned}
P_1(n+1) &= \frac{1}{k}P_0(n) + \frac{1}{k}P_2(n) + \frac{1}{k}P_3(n) + \cdots + \frac{1}{k}P_k(n) \\
&= \frac{1}{k}\{P_0(n) + P_2(n) + P_3(n) + \cdots + P_k(n)\} = \frac{1}{k}\{1 - P_1(n)\}
\end{aligned}$$

$p_n = P_1(n)$ とおくと　$p_1 = \frac{1}{k}$，$p_{n+1} = \frac{1}{k}(1-p_n)$

ゆえに　$p_{n+1} - \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k}\left(p_n - \frac{1}{k+1}\right)$

$$p_n - \frac{1}{k+1} = \left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{k+1}\right) = \left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

よって，求める確率は　$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{k+1}\left\{1 - \left(-\frac{1}{k}\right)^n\right\}}$ ■

13 (1) $\alpha+\beta=-(a+1)$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たす実数 α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}=0$$

4 次式 $f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ が 2 次式 $x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{a}$ を因数にもつから，係数に注意して

$$\begin{aligned} f(x)&=\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}\right\}\{x^2-(a+1)x+2a\} \qquad (*)\\ &=x^4+\left(-a^2-1+\frac{1}{a}\right)x^2+\left(2a^2+2a-1-\frac{1}{a}\right)x+2 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b=-a^2-1+\dfrac{1}{a},\ \ c=2a^2+2a-1-\dfrac{1}{a}}$

(2) $(*)$ から 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{a}=0$ が異なる 2 つの実数解，2 次方程式 $x^2-(a+1)x+2a=0$ が虚数解をもつことから

$$(**)\begin{cases}(a+1)^2-4\cdot1\cdot\dfrac{1}{a}>0\\(a+1)^2-4\cdot2a<0\end{cases}$$

$(**)$ の第 1 式から　$\dfrac{1}{a}(a-1)(a^2+3a+4)>0$

$$a(a-1)\left\{\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}>0 \quad \text{ゆえに} \quad a<0,\ 1<a \quad \cdots①$$

$(**)$ の第 2 式から

$$a^2-6a+1<0 \quad \text{ゆえに} \quad 3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2} \quad \cdots②$$

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1<a<3+2\sqrt{2}}$

(3) (1)，(2) の結果から，$f(a)=-a^2-1+\dfrac{1}{a}$ とおくと

$$f'(a)=-2a-\frac{1}{a^2}=-\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)<0$$

$f(a)$ は，$1<a<3+2\sqrt{2}$ において単調減少で

$$f(1)=-1,\quad f(3+2\sqrt{2})=-15-14\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{-15-14\sqrt{2}<b<-1}$ ■

14 (1) $\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$ より $(x>0,\ y>0)$

$$\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{x}{y}}-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right) \geqq a$$

$t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ とおくと，$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t^2-2$ より

$$\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{x}{y}}-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\sqrt{t^2-2}-t$$

このとき，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} \geqq 2\sqrt{\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}}=2$$

$f(t)=\sqrt{t^2-2}-t$ とおくと $(t \geqq 2)$ $\qquad f(t) \geqq a \quad \cdots(*)$

$$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}-1=\frac{t-\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{2}{\sqrt{t^2-2}(t+\sqrt{t^2-2})}$$

$f(t)$ は単調増加であるから，$f(t)$ は最小値 $f(2)=2-\sqrt{2}$ をとる．

よって，$(*)$ を満たす最大の実数 a は $\qquad \mathbf{2-\sqrt{2}}$

(2) $g(x)=x(1-x^2)=x-x^3$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと $\quad g'(x)=1-3x^2$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

0 以上 1 以下の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して

$$0 \leqq g(a)g(b)g(c)g(d) \leqq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4$$

したがって $\quad abcd(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \left(\frac{4}{27}\right)^2 \quad \cdots(**)$

次の仮定は，$(**)$ に反する．

$$abcd > \frac{4}{27} \quad \text{かつ} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) > \frac{4}{27}$$

よって $\quad abcd \leqq \frac{4}{27} \quad$ または $\quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$ ■

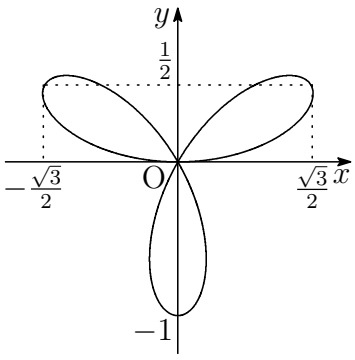
15 $(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0$ に

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

を代入すると

$$r^4-r^3(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta=0$$

整理すると　$r^3(r-\sin 3\theta)=0$



したがって　原点 $r=0$　または　正葉曲線 $r=\sin 3\theta$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから　　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

この範囲において，r は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 1 をとる．

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}}$ のとき，x^2+y^2 は最大値 **1** をとる．

別解　曲線 $C:(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0$ において x^2+y^2 の最大値を r^2 とすると，C と円 $x^2+y^2=r^2$ の共有点 (接点) において，C の接線と円の接線の傾きが一致することを利用する．C より

$$x^4+2x^2y^2+y^4-3x^2y+y^3=0 \qquad (*)$$

これを x について微分すると

$$4x^3+4xy^2-6xy+(4x^2y+4y^3-3x^2+3y^2)y'=0 \qquad (**)$$

$x^2+y^2=r^2$ を x について微分すると　$x+yy'=0$　$\cdots$①

(i) $x=0$ のとき $(y\geqq 0)$，$(*)$ より　$y^3(y+1)=0$　ゆえに　$y=0$

(ii) $y=0$ のとき $(x\geqq 0)$，$(*)$ より　$x^4=0$　ゆえに　$x=0$

(iii) $x>0$，$y>0$ のとき，① より　$y'=-\dfrac{x}{y}$

これを $(**)$ に代入して整理すると　$x^2=3y^2\cdots$②

$(*)$ と ② から x を消去して整理すると

$$y^2(2y-1)=0\quad ゆえに\quad y=\frac{1}{2}\quad さらに\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i)〜(iii) より，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ で x^2+y^2 は最大値 1 をとる．　■