

平成 23 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (数学科教育分野を除く) ① ~ ④ (90 分) 数 I · A
- 文 (行動科学) · 法経学部 ①, ②, ⑤, ⑥ (90 分) 数 I · II · A · B
- 園芸学部 ②, ⑤, ⑥, ⑦ (90 分) 数 I · II · A · B
- 教育 (情報教育分野) ②, ⑤, ⑥, ⑧ (90 分) 数 I · II · A · B
- 教育 (数学科教育分野) ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ (150 分) 数 I · II · A · B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) ⑤, ⑨, ⑩, ⑪, ⑫ (120 分)
数 I · II · III · A · B · C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 薬学部 · 工学部 (機械工学科, メディカルシステム工学科, 電気電子工学科, ナノサイエンス学科, 共生応用化学科, 画像科学科, 情報画像学科), 先進科学プログラム ⑨, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬ (120 分)
数 I · II · III · A · B · C
- 医学部 ⑩, ⑫, ⑬, ⑭, ⑮ (120 分) 数 I · II · III · A · B · C
- 理学部 (数学 · 情報数理) ⑦, ⑨, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬ (180 分)
数 I · II · III · A · B · C

- ① 1 個のさいころを 3 回投げる. 1 回目に出る目を a_1 , 2 回目に出る目を a_2 , 3 回目に出る目を a_3 とし, 整数 n を

$$n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

と定める.

- (1) $n = 0$ である確率を求めよ.
- (2) $|n| = 30$ である確率を求めよ.
- ② 三角形 ABC の面積は $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > AC$ である. このとき, 三角形 ABC の各辺の長さを求めよ.

- 3 四角錐 OABCD において、底面 ABCD は 1 辺の長さ 2 の正方形で、

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{5}$$

である。

- (1) 四角錐 OABCD の高さを求めよ。
 - (2) 四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ。
 - (3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ。
- 4 実数 x の関数 $f(x) = |x-1|(x-2)$ を考える。 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x+a$ との共有点の個数は、定数 a の値によって、どのように変わるかを調べよ。
- 5 a は正の実数とし、座標平面上の直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。 C 上の点 (x, y) (ただし $0 < x < \frac{1}{a}$) で l との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。
- (1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。
 - (2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。
- 6 三角形 ABC の外心を O 、重心を G とする。
- (1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば、三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。
 - (2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で、 $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば、三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。
- 7 n 人 ($n \geq 3$) でじゃんけんを 1 回行うとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。
- (2) あいこになる確率を求めよ。
- (3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり、勝つ人数が 0 の場合である。

8 n 段の階段を上るのに、一步で1段、2段、または3段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば、 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ である。

- (1) a_4 , a_5 の値を求めよ。
- (2) a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , a_{n+3} ($n \geq 1$) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) a_{10} の値を求めよ。

9 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に1辺の長さが r^n の正方形 R_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) があり、その頂点を反時計回りに A_n , B_n , C_n , D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

- (i) 正方形 R_0 の頂点は $A_0(0, 0)$, $B_0(1, 0)$, $C_0(1, 1)$, $D_0(0, 1)$ である。
- (ii) $A_{n+1} = C_n$ で、点 D_{n+1} は辺 $C_n D_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A_2 , A_3 , A_4 の座標を r を用いて表せ。
- (2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とおく。 $x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r , n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を r を用いて表せ。

10 三角形 ABC の外心を O , 重心を G , 内心を I とする。

- (1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば、三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。
- (2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で、 $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば、三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。
- (3) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ が成り立つならば、三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

11 $f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。 $\log x$ は x の自然対数を表す。

- (1) $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。
- (2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$ の値を求めよ。

12 $k+1$ 個 ($k \geq 1$) の部屋 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ がある. 千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等しい確率 $\frac{1}{k}$ で 1 つ選び, そこへ移動する. 最初, 部屋 A_0 にいた千葉君が, n 回 ($n \geq 1$) 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ.

13 a, b, c は実数とし,

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく. さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち,

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する.

- (1) b, c を a を用いて表せ.
- (2) a のとり得る値の範囲を求めよ.
- (3) b のとり得る値の範囲を求めよ.

14 次の問いに答えよ.

- (1) 不等式

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x, y に対して成立するような, 最大の実数 a の値を求めよ.

- (2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ.

15 座標平面上の点 (x, y) が

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき, $x^2 + y^2$ の最大値, およびその最大値を与える x, y の値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a_1, a_2, a_3 \text{ が互いに異なる確率は } \frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

$$\text{求める確率は, この余事象の確率であるから } 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$(2) \quad |a_1 - a_2| |a_2 - a_3| |a_3 - a_1| = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ より, } \{a_1, a_2, a_3\} \text{ は } \{1, 3, 6\} \text{ または } \{1, 4, 6\} \text{ であるから, 求める確率は}$$

$$\frac{2 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{2} \quad a = BC, b = CA, c = AB \text{ とおくと, 正弦定理により}$$

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \cdot 1$$

$$\text{ゆえに, } BC = a = \sqrt{3}, \quad b = 2 \sin B \cdots \textcircled{1}, \quad c = 2 \sin C.$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 120^\circ - B. \text{ また, } c > b \text{ より, } C > B \text{ であるから}$$

$$120^\circ - B > B \quad \text{これを解いて } B < 60^\circ$$

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A = \sqrt{3} \cos B + (2 \sin B) \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \cos B + \sin B \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \text{ より } \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \quad \text{ゆえに } bc = \sqrt{3} + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

③の左辺について, ①, ②より

$$\begin{aligned} bc &= 2 \sin B (\sqrt{3} \cos B + \sin B) = 2\sqrt{3} \sin B \cos B + 2 \sin^2 B \\ &= \sqrt{3} \sin 2B - \cos 2B + 1 = 2 \sin(2B - 30^\circ) + 1 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$0^\circ < B < 60^\circ \text{ より, } -30^\circ < 2B - 30^\circ < 90^\circ. \quad \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より}$$

$$\sin(2B - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに } 2B - 30^\circ = 60^\circ \quad \text{すなわち } B = 45^\circ$$

$$\text{これを } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ に代入して } CA = b = \sqrt{2}, \quad AB = c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{補足 加法定理により } c &= 2 \sin C = 2 \sin(120^\circ - B) \\ &= 2(\sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B) \\ &= \sqrt{3} \cos B + \sin B \end{aligned}$$

別解 余弦定理により $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$

$$a = \sqrt{3}, bc = \sqrt{3} + 1 \cdots \textcircled{3} \text{ より } b^2 + c^2 = 4 + \sqrt{3}$$

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4 + \sqrt{3} + 2(\sqrt{3} + 1) = 3(2 + \sqrt{3})$$

$$(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 4 + \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} + 1) = 2 - \sqrt{3}$$

$b < c$ より

$$b+c = \sqrt{3(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$$

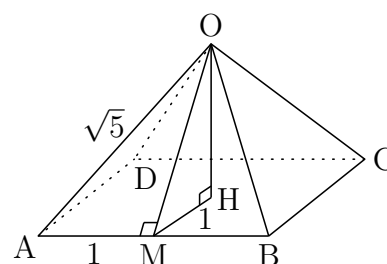
$$-b+c = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

上の2式から $b = \sqrt{2}, c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ■

- 3** (1) 辺ABの中点をMとし、Oから底面ABCDに垂線OHを引くと

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$



- (2) 四角錐OABCDの表面積を T とすると

$$T = 2^2 + 4 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

四角錐OABCDの体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

四角錐OABCDに内接する球の半径を r とすると、 $\frac{1}{3}Tr = V$ より

$$\frac{1}{3} \cdot 12r = \frac{4}{3} \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- (3) (2)の結果から

球 S の表面積は $4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi$

球 S の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$ ■

4 $y = f(x) = |x - 1|(x - 2)$ と $y = x + a$ の共有点の x 座標は

$$f(x) = x + a \quad \text{ゆえに} \quad f(x) - x = a$$

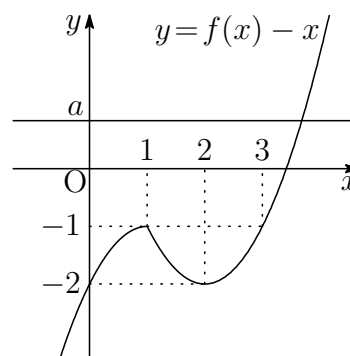
したがって、求める共有点の個数は、曲線 $y = f(x) - x$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい。

(i) $x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= -(x - 1)(x - 2) - x \\ &= -x^2 + 2x - 2 \\ &= -(x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (x - 1)(x - 2) - x \\ &= x^2 - 4x + 2 \\ &= (x - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$



よって

$\left\{ \begin{array}{l} a < -2, -1 < a \text{ のとき} \\ a = -2, -1 \text{ のとき} \\ -2 < a < -1 \text{ のとき} \end{array} \right.$	1 個
	2 個
	3 個

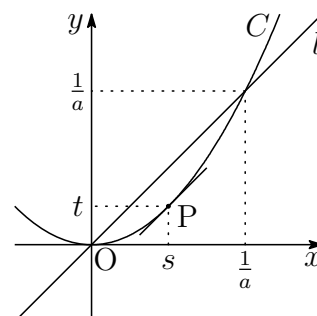


- 5 (1) 直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ の共有点の x 座標は

$$ax^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad x(ax - 1) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 0, \frac{1}{a}$$

$$y = ax^2 \text{ を微分すると} \quad y' = 2ax$$



C 上の点 $P(s, t)$ と l の距離 d が最大となるとき, C 上の点 P における接線が l と平行, すなわち, 接線の傾きが 1 であるから

$$2as = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{2a}, \quad t = a \left(\frac{1}{2a} \right)^2 = \frac{1}{4a}$$

このとき, $0 < s < \frac{1}{a}$ であることに注意して $s = \frac{1}{2a}, t = \frac{1}{4a}$

したがって, 点 $P\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$ から直線 $l: x - y = 0$ まで距離 d は ($a > 0$)

$$d = \frac{\left| \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8a}$$

別解 C 上の点 (s, as^2) ($0 < s < \frac{1}{a}$) から直線 $l: x - y = 0$ までの距離は

$$\frac{|s - as^2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -a \left(s - \frac{1}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a} \right|$$

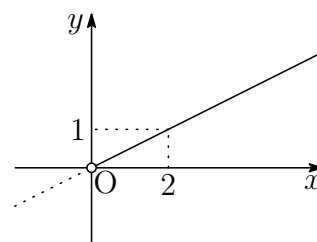
$s = \frac{1}{2a}$, すなわち, $P\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$ において, 最大値 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{8a}$

- (2) (1) の結果から P の描く点 (x, y) の軌跡は

$$x = \frac{1}{2a}, \quad y = \frac{1}{4a} \quad (a > 0)$$

上の 2 式から, 求める軌跡は, 右図の

$$\text{半直線} \quad y = \frac{1}{2}x \quad (x > 0)$$



- 6 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とし, $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \text{ であるから, } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \text{ により}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c} = -\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (-\vec{b} - \vec{a}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ よって, $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形.

- (2) $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ より $\left(k \neq \frac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad (3k - 1)\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \quad \dots (*)$$

したがって

$$\begin{aligned} (3k - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = R^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3k - 1)\vec{a} \cdot \vec{c} &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{c} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} + R^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (3k - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = (3k - 1)\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$3k - 1 \neq 0 \text{ であるから} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 2R^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 2R^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$(**) \text{ および上の2式から} \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \text{すなわち} \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$$

よって, $\triangle ABC$ は, $AB = AC$ の二等辺三角形. ■

- 7 (1) 勝つ人の選び方 n 通りと手の出し方 3 通りより, その確率は

$$\frac{n \cdot 3}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}}$$

- (2) 勝負がつく, すなわち, n 人の出し方が 2 種類である確率は

$$\frac{{}_3C_2(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

求める確率は, この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

- (3) k 人が勝つ確率を $P(k)$ とすると ($1 \leq k \leq n-1$)

$$P(k) = {}_nC_k \cdot 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

したがって, 求める期待値を E とすると

$$E = \sum_{k=1}^{n-1} kP(k) = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} k {}_nC_k \quad \dots (*)$$

ここで $k {}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)} = n {}_{n-1}C_{k-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k {}_nC_k &= \sum_{k=1}^n k {}_nC_k - n = n \sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1} - n \\ &= n \cdot 2^{n-1} - n = n(2^{n-1} - 1) \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(*), (**) より, 求める期待値は $E = \frac{n(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1}}$ ■

- 8** (1) 4段目に至る昇り方は、それぞれ、1段、2段、3段昇ってくる、すなわち、 a_3 通り、 a_2 通り、 a_1 通りがある。 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ より

$$a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

同様に $a_5 = a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = 13$

- (2) $n + 3$ 段目に至る昇り方は、それぞれ、1段、2段、3段昇ってくる、すなわち、 a_{n+2} 通り、 a_{n+1} 通り、 a_n 通りがあるから

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

- (3) (2) で求めた漸化式に順次 $n = 3, 4, 5, 6, 7$ を代入すると

$$a_6 = a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24$$

$$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44$$

$$a_8 = a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81$$

$$a_9 = a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \mathbf{274}$$

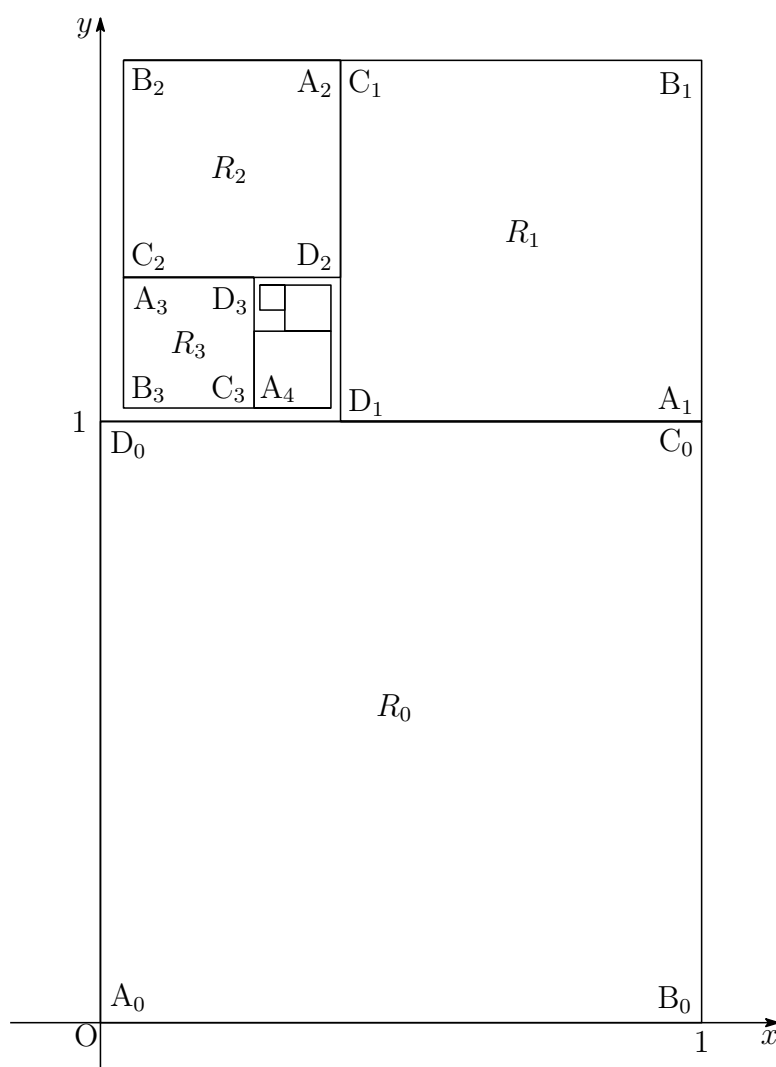


9 (1) $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} -r^2 \\ -r^2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_3A_4} = r^3 \begin{pmatrix} r^3 \\ -r^3 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4}$ より

$$\overrightarrow{OA_2} = \begin{pmatrix} 1-r \\ 1+r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OA_3} = \begin{pmatrix} 1-r-r^2 \\ 1+r-r^2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OA_4} = \begin{pmatrix} 1-r-r^2+r^3 \\ 1+r-r^2-r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r)(1-r)^2 \\ (1+r)^2(1-r) \end{pmatrix}$$

よって $A_2(1-r, 1+r)$, $A_3(1-r-r^2, 1+r-r^2)$,
 $A_4((1+r)(1-r)^2, (1+r)^2(1-r))$



$$(2) \frac{A_{4n}A_{4n+1}}{OA_1} = \frac{A_{4n+1}A_{4n+2}}{A_1A_2} = \frac{A_{4n+2}A_{4n+3}}{A_2A_3} = \frac{A_{4n+3}A_{4n+4}}{A_3A_4} = r^{4n}$$

また、それぞれの線分の向きが同じであるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}} &= r^{4n}\overrightarrow{OA_1}, & \overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} &= r^{4n}\overrightarrow{A_1A_2}, \\ \overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}} &= r^{4n}\overrightarrow{A_2A_3}, & \overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}} &= r^{4n}\overrightarrow{A_3A_4} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+4}} &= \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}} + \overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} + \overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}} + \overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}} \\ &= r^{4n}\overrightarrow{OA_1} + r^{4n}\overrightarrow{A_1A_2} + r^{4n}\overrightarrow{A_2A_3} + r^{4n}\overrightarrow{A_3A_4} \\ &= r^{4n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}) = r^{4n}\overrightarrow{OA_4} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{A_{4n}A_{4n+4}} = (x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n)$ より、上式および(1)の結果から

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n &= r^{4n}(\mathbf{1} + \mathbf{r})(\mathbf{1} - \mathbf{r})^2, \\ \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n &= r^{4n}(\mathbf{1} + \mathbf{r})^2(\mathbf{1} - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

(3) $x_0 = 0, y_0 = 0, 0 < r < 1$ より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n}(\mathbf{1} + \mathbf{r})(\mathbf{1} - \mathbf{r})^2 \\ &= (\mathbf{1} + \mathbf{r})(\mathbf{1} - \mathbf{r})^2 \cdot \frac{1}{1 - r^4} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{r}}{\mathbf{1} + \mathbf{r}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1} - y_n) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{4n}(\mathbf{1} + \mathbf{r})^2(\mathbf{1} - \mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{1} + \mathbf{r})^2(\mathbf{1} - \mathbf{r}) \cdot \frac{1}{1 - r^4} = \frac{\mathbf{1} + \mathbf{r}}{\mathbf{1} + \mathbf{r}^2} \end{aligned}$$

■

- 10** (1) **6** (1) を参照.
 (2) **6** (2) を参照.
 (3) $\vec{i} = \vec{OI}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\vec{IB}|^2 - |\vec{IC}|^2 &= |\vec{b} - \vec{i}|^2 - |\vec{c} - \vec{i}|^2 \\ &= (|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{i} + |\vec{i}|^2) - (|\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{i} + |\vec{i}|^2) \\ &= (R^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{i} + |\vec{i}|^2) - (R^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{i} + |\vec{i}|^2) \\ &= 2\vec{i} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 2\vec{OI} \cdot \vec{BC} = 0 \end{aligned}$$

ゆえに $|\vec{IB}|^2 = |\vec{IC}|^2$ すなわち $|\vec{IB}| = |\vec{IC}|$

$\triangle IBC$ は, $IB=IC$ の二等辺三角形である. したがって

$$\angle IBC = \angle ICB$$

I は $\triangle ABC$ の内心であるから

$$\angle ABC = 2\angle IBC, \quad \angle ACB = 2\angle ICB$$

上の諸式から $\angle ABC = \angle ACB$

よって, $\triangle ABC$ は, $AB = AC$ の二等辺三角形. ■

11 (1) $h(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とおくと, $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = xh(x)$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 xh(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)'h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2h(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2h'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}h(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h(1) = h(1) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$h(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ について, $t = \tan \theta$ とおくと

t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + t^2$$

したがって $h(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

よって $\int_0^1 f(x) dx = h(1) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(2) $A(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, $A(x) = xh(x) - \log(1+x^2)$ より

$$A(0) = 0$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= h(x) + xh'(x) - \frac{2x}{1+x^2} \\ &= h(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = h(x) - \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

$h(0) = 0$ より, $A'(0) = 0$

$$\begin{aligned} A''(x) &= h'(x) - \frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$A'(x)$ は単調増加であるから $x > 0$ において $A'(x) > A'(0) = 0$
 さらに, $A(x)$ は単調増加であり $x > 0$ において $A(x) > A(0) = 0$
 よって, $x > 0$ において $f(x) > g(x)$

$$(3) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\} \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \log(k^2 + n^2) - 2 \log n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} \\ &= \int_0^1 \log(x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x)' \log(x^2 + 1) dx \\ &= \left[x \log(x^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \log 2 - 2 + 2h(1) \\ &= \log 2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \log 2 + \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

■

12 千葉君が n 回目 ($n \geq 1$) の移動後に、部屋 A_i にいる確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned} P_1(n+1) &= \frac{1}{k} P_0(n) + \frac{1}{k} P_2(n) + \frac{1}{k} P_3(n) + \cdots + \frac{1}{k} P_k(n) \\ &= \frac{1}{k} \{ P_0(n) + P_2(n) + P_3(n) + \cdots + P_k(n) \} = \frac{1}{k} \{ 1 - P_1(n) \} \end{aligned}$$

$$p_n = P_1(n) \text{とおくと } p_1 = \frac{1}{k}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{k}(1 - p_n)$$

$$\text{ゆえに } p_{n+1} - \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k} \left(p_n - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$p_n - \frac{1}{k+1} = \left(-\frac{1}{k} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{k+1} \right) = \left(-\frac{1}{k} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\text{よって、求める確率は } p_n = \frac{1}{k+1} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{k} \right)^n \right\}$$

■

- 13** (1) $\alpha + \beta = -(a + 1)$, $\alpha\beta = \frac{1}{a}$ を満たす実数 α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a} = 0$$

4 次式 $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$ が 2 次式 $x^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a}$ を因数にもつから、係数に注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{ x^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a} \right\} \{ x^2 - (a + 1)x + 2a \} \quad (*) \\ &= x^4 + \left(-a^2 - 1 + \frac{1}{a} \right) x^2 + \left(2a^2 + 2a - 1 - \frac{1}{a} \right) x + 2 \end{aligned}$$

よって $b = -a^2 - 1 + \frac{1}{a}$, $c = 2a^2 + 2a - 1 - \frac{1}{a}$

- (2) (*) から 2 次方程式 $x^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a} = 0$ が異なる 2 つの実数解, 2 次方程式 $x^2 - (a + 1)x + 2a = 0$ が虚数解をもつことから

$$(**) \begin{cases} (a + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} > 0 \\ (a + 1)^2 - 4 \cdot 2a < 0 \end{cases}$$

(**) の第 1 式から $\frac{1}{a}(a - 1)(a^2 + 3a + 4) > 0$

$$a(a - 1) \left\{ \left(a + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a < 0, 1 < a \quad \dots \textcircled{1}$$

(**) の第 2 式から

$$a^2 - 6a + 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の共通範囲を求めて $1 < a < 3 + 2\sqrt{2}$

- (3) (1), (2) の結果から, $f(a) = -a^2 - 1 + \frac{1}{a}$ とおくと

$$f'(a) = -2a - \frac{1}{a^2} = - \left(2a + \frac{1}{a^2} \right) < 0$$

$f(a)$ は, $1 < a < 3 + 2\sqrt{2}$ において単調減少で

$$f(1) = -1, \quad f(3 + 2\sqrt{2}) = -15 - 14\sqrt{2}$$

よって $-15 - 14\sqrt{2} < b < -1$ ■

14 (1) $\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$ より ($x > 0, y > 0$)

$$\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{x}{y}} - \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \geq a$$

$$t = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \text{ とおくと, } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^2 - 2 \text{ より}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{x}{y}} - \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \sqrt{t^2 - 2} - t$$

このとき、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}} = 2$$

$$f(t) = \sqrt{t^2 - 2} - t \text{ とおくと } (t \geq 2) \quad f(t) \geq a \quad \dots (*)$$

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2}} - 1 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 2}}{\sqrt{t^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{t^2 - 2}(t + \sqrt{t^2 - 2})}$$

$f(t)$ は単調増加であるから、 $f(t)$ は最小値 $f(2) = 2 - \sqrt{2}$ をとる。

よって、(*) を満たす最大の実数 a は $2 - \sqrt{2}$

(2) $g(x) = x(1 - x^2) = x - x^3$ ($0 \leq x \leq 1$) とおくと $g'(x) = 1 - 3x^2$

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	\nearrow	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	\searrow	0

0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$0 \leq g(a)g(b)g(c)g(d) \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^4$$

$$\text{したがって } abcd(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) \leq \left(\frac{4}{27} \right)^2 \quad \dots (**)$$

次の仮定は、(**) に反する。

$$abcd > \frac{4}{27} \quad \text{かつ} \quad (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) > \frac{4}{27}$$

$$\text{よって } abcd \leq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) \leq \frac{4}{27} \quad \blacksquare$$

15 $(x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0$ に

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を代入すると

$$r^4 - r^3(3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta = 0$$

$$\text{整理すると } r^3(r - \sin 3\theta) = 0$$

したがって 原点 $r = 0$ または 正葉曲線 $r = \sin 3\theta$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ であるから } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

この範囲において、 r は $\theta = \frac{\pi}{6}$ で最大値 1 をとる.

よって $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ のとき、 $x^2 + y^2$ は最大値 1 をとる.

別解 曲線 $C: (x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0$ において $x^2 + y^2$ の最大値を r^2 とすると、 C と円 $x^2 + y^2 = r^2$ の共有点 (接点) において、 C の接線と円の接線の傾きが一致することを利用する. C より

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 3x^2y + y^3 = 0 \quad (*)$$

これを x について微分すると

$$4x^3 + 4xy^2 - 6xy + (4x^2y + 4y^3 - 3x^2 + 3y^2)y' = 0 \quad (**)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ を } x \text{ について微分すると } x + yy' = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(i) \ x = 0 \text{ のとき } (y \geq 0), (*) \text{ より } y^3(y + 1) = 0 \quad \text{ゆえに } y = 0$$

$$(ii) \ y = 0 \text{ のとき } (x \geq 0), (*) \text{ より } x^4 = 0 \quad \text{ゆえに } x = 0$$

$$(iii) \ x > 0, y > 0 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より } y' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{これを } (**) \text{ に代入して整理すると } x^2 = 3y^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*) と ② から x を消去して整理すると

$$y^2(2y - 1) = 0 \quad \text{ゆえに } y = \frac{1}{2} \quad \text{さらに } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i)~(iii) より、 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ で $x^2 + y^2$ は最大値 1 をとる. ■

