

平成 22 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (数学科教育分野を除く) [1] [2] [3] [4] (90 分) 数 I・A
- 文 (行動科学)・法経学部 [2] [3] [4] [5] (90 分) 数 I・II・A・B
- 園芸学部・教育 (情報教育分野) [3] [4] [5] [6] (90 分) 数 I・II・A・B
- 教育 (数学科教育分野) [1] [3] [4] [5] [6] [7] (150 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [2] [4] [5] [7] [8] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 薬学部・工学部 (機械工学科, メディカルシステム工学科, 電気電子工学科, ナノサイエンス学科, 共生応用化学科, 画像科学科, 情報画像学科), 先進科学プログラム [5] [6] [7] [8] [9] (120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 医学部 [5] [6] [9] [10] [11] (120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [5] [6] [7] [8] [9] [11] (180 分)
数 I・II・III・A・B・C

[1] 直角三角形 ABC は, $\angle C$ が直角で, 各辺の長さは整数であるとする. 辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 辺 AB, CA の長さを p を用いて表せ.
- (2) $\tan \angle A$ と $\tan \angle B$ は, いずれも整数にならないことを示せ.

[2] 1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える. さいころを 3 回投げ, 出た目を順に i, j, k とするとき, $\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う. ただし, i, j, k の中に互いに等しい数があるときは, 得点は 0 であるとする.

- (1) 得点が 0 となる確率を求めよ.
- (2) 得点が 27 となる確率を求めよ.
- (3) 得点の期待値を求めよ.

[3] $\triangle ABC$ において, 頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1, 頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$, 頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である. このとき, $\triangle ABC$ の面積と, 内接円の半径, および, 外接円の半径を求めよ.

4 a を実数とする. 関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ.

5 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし, D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする. 座標平面上で, x 座標, y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ.

- (1) $a = 0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ.
- (2) a, b が共に整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, a, b の値によらず一定であることを示せ.

6 数直線の原点上にある点が, 以下の規則で移動する試行を考える.

(規則) サイコロを振って出た目が奇数の場合は, 正の方向に 1 移動し, 出た目が偶数の場合は, 負の方向に 1 移動する.

k 回の試行の後の, 点の座標を $X(k)$ とする.

- (1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ.
- (2) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$ であって, かつ, $X(6) = 0$ となる確率を求めよ.
- (3) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$ であって, かつ, $X(10) = 0$ となる確率を求めよ.

7 $\triangle ABC$ は, 1 辺の長さが 1 の正三角形で, t は正の実数とする. $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおく. 直線 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり, $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$ をみたしている. 正三角形 $\triangle ADE$ の重心を G , 線分 BE の中点を M とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$ を計算せよ.
- (2) t が正の実数全体を動くとき, $\triangle CGM$ の面積を最小にする t の値と, そのときの面積を求めよ.

8 a, b は実数とする. 関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t \, dt$$

をみたし, かつ, $-\pi \leq x \leq \pi$ における最大値は 2π である. このとき,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx$$

を最小にする a, b の値と, その最小値を求めよ.

- 9** a を 1 より大きい実数とし、座標平面上に、点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ をとる. 曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ と、曲線 $y = \frac{a}{x}$ 上の点 $Q\left(q, \frac{a}{q}\right)$ が、3 条件

- (1) $p > 0, q > 0$
- (2) $\angle AOP < \angle AOQ$
- (3) $\triangle OPQ$ の面積は 3 に等しい.

をみたしながら動くとき、 $\tan \angle POQ$ の最大値が $\frac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ.

- 10** 以下の問いに答えよ.

- (1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ.
- (2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ.

- 11** $f(x)$ は実数全体で定義された関数とする. 実数 a に関する条件 (P) を考える.

- (P) 正の実数 r を十分小さく選べば、 $|x - a| < r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ.

このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 a が条件 (P) をみたし、かつ、 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、 $f'(a) = 0$ であることを証明せよ.
- (2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき、条件 (P) をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ.

- (3) 一般に、実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し、次の命題は正しいか. 正しいければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ.
(命題) すべての実数 a が条件 (P) をみたすならば、 $f(x)$ は定数関数である.

解答例

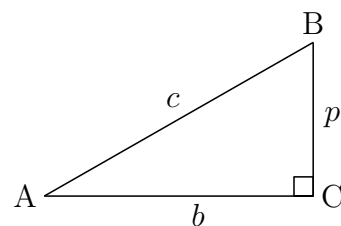
- 1** (1) $p = BC$, $\angle C$ が直角により, $c = AB$, $b = CA$
 とおき, 三平方定理に適用すると

$$c^2 = b^2 + p^2$$

$$\text{ゆえに} \quad (c-b)(c+b) = p^2$$

p が素数, $c-b < c+b$ より

$$c-b=1, c+b=p^2 \quad \text{よって} \quad b = \frac{p^2-1}{2}, c = \frac{p^2+1}{2}$$



- (2) (1)の結果から

$$\tan \angle A = \frac{p}{b} = \frac{2p}{(p+1)(p-1)}, \quad \tan \angle B = \frac{b}{p} = \frac{(p+1)(p-1)}{2p}$$

ユークリッドの互除法により $p \pm 1$ と p は互いに素である. また, p は 3 以上の素数であるから, $\tan \angle A$, $\tan \angle B$ は整数ではない.

別解 $\tan \angle A$ について

$$\tan \angle A = \frac{p}{b} = \frac{2p}{p^2-1} < \frac{2(p+1)}{(p+1)(p-1)} = \frac{2}{p-1} \leq 1 \quad (p \geq 3)$$

$0 < \tan \angle A < 1$ であるから, $\tan \angle A$ は整数ではない. ■

- 2** (1) 得点が 0 とならない, すなわち, サイコロの目が 3 回とも異なる確率は

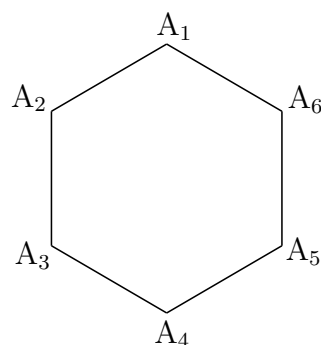
$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

得点が 0 となる確率は, この余事象の確率であるから

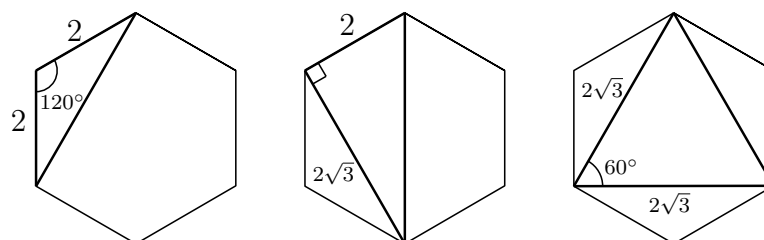
$$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

- (2) 得点が 27, すなわち, 正六角形に内接する三角形が $\triangle A_1A_3A_5$ または $\triangle A_2A_4A_6$ であるから, 求める確率は

$$\frac{3! + 3!}{6^3} = \frac{1}{18}$$



- (3) 0 以外の得点は, $(\sqrt{3})^2$, $(2\sqrt{3})^2$, $(3\sqrt{3})^2$ の 3 通りである.



得点が $(\sqrt{3})^2$ となるのは, 三角形が正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ と隣接する 2 辺を共有するときで, その確率は

$$\frac{6 \times 3!}{6^3} = \frac{1}{6}$$

得点が $(2\sqrt{3})^2$ となる確率は, 以上の結果から

$$1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

よって, 求める期待値 $E(X)$ は

X	0	3	12	27	計
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{3} + 27 \times \frac{1}{18} = 6$$

補足 得点が $(2\sqrt{3})^2$ となるのは, 正六角形に内接する三角形の一边が A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 を斜辺とする直角三角形のときで, その確率は

$$\frac{3 \times 3! \cdot 4}{6^3} = \frac{1}{3}$$



3 $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\triangle ABC$ の面積を S とし, $\triangle ABC$ の外接円の半径, 内接円の半径をそれぞれ R , r とすると, $\triangle ABC$ の面積について

$$S = \frac{1}{2}a \cdot 1 = \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}c \cdot 2 \quad \text{ゆえに} \quad S = \frac{a}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}} = c \quad (*)$$

$a = 2c$, $b = \sqrt{2}c$ を余弦定理に適用すると

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(2c)^2 + (\sqrt{2}c)^2 - c^2}{2 \cdot 2c \cdot \sqrt{2}c} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

(*) より, $S = c$, $a = 2c$, $b = \sqrt{2}c$ を $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ に代入すると

$$c = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \sqrt{2}c \cdot \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \text{よって} \quad S = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径 r は, $S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$ により

$$c = \frac{1}{2}(2c + \sqrt{2}c + c)r \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{2})cr$$

$$\text{したがって} \quad r = \frac{2}{3 + \sqrt{2}} = \frac{2(3 - \sqrt{2})}{7}$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径 R は, 正弦定理により

$$2R = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

■

4 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ より

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2a & (x \geq 2) \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 2a & (x \leq 2) \end{cases}$$

(i) $x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は, $g(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2a$ とおくと

$$2 \leq \frac{a}{2} \quad \text{すなわち} \quad 4 \leq a \quad \text{のとき} \quad g\left(\frac{a}{2}\right) = 2a$$

$$\frac{a}{2} \leq 2 \quad \text{すなわち} \quad a \leq 4 \quad \text{のとき} \quad g(2) = \frac{a^2}{4} + 4$$

(ii) $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は, $h(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 2a$ とおくと

$$-\frac{a}{2} \leq 2 \quad \text{すなわち} \quad -4 \leq a \quad \text{のとき} \quad h\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$$

$$2 \leq -\frac{a}{2} \quad \text{すなわち} \quad a \leq -4 \quad \text{のとき} \quad h(2) = \frac{a^2}{4} + 4$$

(i), (ii) から, $f(x)$ の最小値を m とすると

$$(a) \quad 4 \leq a \quad \text{のとき} \quad m = \min(2a, -2a)$$

$$(b) \quad -4 \leq a \leq 4 \quad \text{のとき} \quad m = \min\left(\frac{a^2}{4} + 4, -2a\right)$$

$$(c) \quad a \leq -4 \quad \text{のとき} \quad m = \frac{a^2}{4} + 4$$

ここで $4 \leq a$ のとき $-2a < 2a$

$$\frac{a^2}{4} + 4 - (-2a) = \left(\frac{a}{2} + 2\right)^2 \geq 0 \quad \text{より} \quad -2a \leq \frac{a^2}{4} + 4$$

$$\text{よって} \quad m = \begin{cases} -2a & (-4 \leq a) \\ \frac{a^2}{4} + 4 & (a \leq -4) \end{cases}$$

■

5 (1) $a = 0$ のとき

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq b\}$$

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = b \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{b}$$

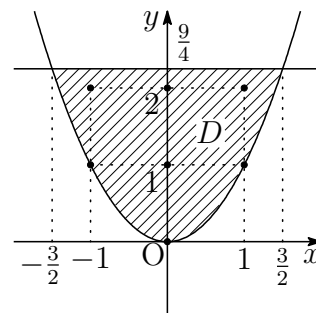
D の面積が $\frac{9}{2}$ であるから

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (\sqrt{b} + x)(\sqrt{b} - x) dx = \frac{1}{6}(2\sqrt{b})^3 = \frac{9}{2}$$

ゆえに $(2\sqrt{b})^3 = 27$ したがって $\sqrt{b} = \frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は, 次の 7 個である.

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (\pm 1, 1), (\pm 1, 2)$$

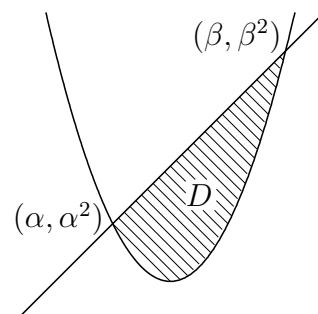


(2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ の共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$x^2 - (ax + b) = (x - \alpha)(x - \beta) \quad (*)$$

係数を比較して

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = -b \quad (**)$$



領域 D の面積が $\frac{9}{2}$ であるから, $(*)$ より

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{(ax + b) - x^2\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{9}{2}$$

したがって $(\beta - \alpha)^3 = 27$ ゆえに $\beta - \alpha = 3 \quad \dots \textcircled{1}$

① と $(**)$ の第 1 式から $\alpha = \frac{a-3}{2}$, $\beta = \frac{a+3}{2}$

これらを $(**)$ の第 2 式に代入して $\frac{(a-3)(a+3)}{4} = -b$

$a+3 = (a-3)+6$ より, $a-3$ と $a+3$ の偶奇は一致する. 上式の右辺が整数より, $a-3, a+3$ はともに偶数である. ゆえに, α, β は整数である.

領域 D に含まれる格子点の個数を N とすると, a, b が整数であるから

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{k=0}^3 \{a(\alpha + k) + b - (\alpha + k)^2 + 1\} \\
 &= \sum_{k=0}^3 (a\alpha + b - \alpha^2 + 1) + (a - 2\alpha) \sum_{k=0}^3 k - \sum_{k=0}^3 k^2 \\
 &= 4(a\alpha + b - \alpha^2 + 1) + 6(a - 2\alpha) - 14 \\
 &= 4a\alpha + 4b - 4\alpha^2 + 6a - 12\alpha - 10
 \end{aligned}$$

上式に $\alpha = \frac{a-3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}(a+3)(a-3)$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 N &= 2a(a-3) - (a+3)(a-3) - (a-3)^2 + 6a - 6(a-3) - 10 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

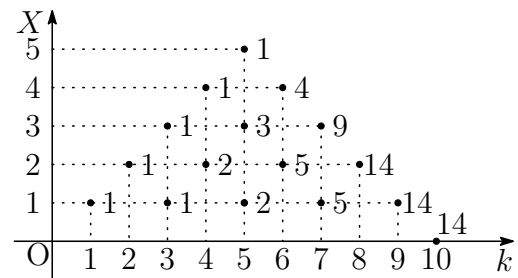
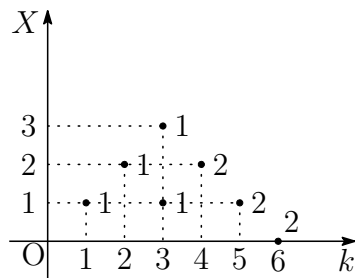
よって, D に含まれる格子点の個数は, a, b の値によらず一定である. ■

- 6** (1) サイコロを振る 10 回の試行のうち, 奇数の目が 5 回, 偶数の目が 5 回出る確率であるから

$${}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 9 \cdot 7 \cdot 4 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}$$

- (2) $X(k) > 0$ ($0 < k < 6$), かつ $X(6) = 0$ となる確率は (左下の図)

$$\frac{2}{2^6} \quad \text{よって, 求める確率は} \quad \frac{2}{2^6} \times 2 = \frac{1}{16}$$



- (3) $X(k) > 0$ ($0 < k < 10$), かつ $X(10) = 0$ となる確率は (右上の図)

$$\frac{14}{2^{10}} \quad \text{よって, 求める確率は} \quad \frac{14}{2^{10}} \times 2 = \frac{7}{256}$$

■

- 7 (1) M は線分 BE の中点であるから

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + t\vec{c})$$

G は $\triangle ADE$ の重心であるから

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(t\vec{b} + t\vec{c})$$

したがって

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{b} + t\vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(t\vec{b} + t\vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + t\vec{c}) = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c}$$

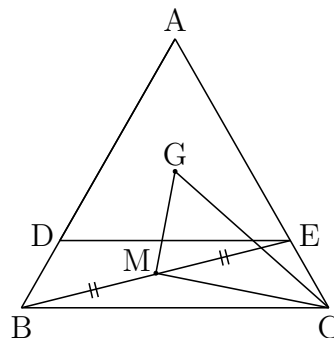
$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} &= \left\{ -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c} \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{6}\right)|\vec{b}|^2 + \left(-\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(\frac{t^2}{12} - \frac{t}{6}\right)|\vec{c}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{t^2}{12} - \frac{t}{6}\right) = 0 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果より, $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MG}$ であるから, $\triangle CGM$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MC}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 - \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 3t + 3), \\ |\overrightarrow{MG}|^2 &= \left| \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c} \right|^2 = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 |\vec{b}|^2 - \frac{t}{3}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{t^2}{36}|\vec{c}|^2 \\ &= \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{t}{6}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{t^2}{36} = \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3), \\ S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{MC}||\overrightarrow{MG}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}}(t^2 - 3t + 3) = \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

よって, $\triangle CGM$ の面積は, $t = \frac{3}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{32}$ をとる.



発展 空間のベクトル考え，ベクトル積 (外積) を用いると ¹

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{MC}} \times \overrightarrow{\text{MG}} &= \left\{ -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c} \right\} \times \left\{ \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{6}\right) - \left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right) \right\} \vec{b} \times \vec{c} \\ &= \frac{1}{6}(t^2 - 3t + 3)\vec{b} \times \vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\text{MC}} \times \overrightarrow{\text{MG}}| = \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3)|\vec{b} \times \vec{c}| \\ &= \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3)\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

また， $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ であるから，次のように計算してもよい。

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{b}||\vec{c}| \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.10 を参照)

$$\boxed{8} \quad f(x) = a \sin x + b \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t \, dt$$

$$k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t \, dt \text{ とおくと } f(x) = a \sin x + b \cos x + k \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} k &= \int_{-\pi}^{\pi} (a \sin t + b \cos t + k) \cos t \, dt \\ &= a \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt + b \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt + k \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt \\ &= \frac{a}{2} \left[\sin^2 t \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{b}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\pi}^{\pi} + k \left[\sin t \right]_{-\pi}^{\pi} = b\pi \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$(*) \text{ より } f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + k \quad \left(\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$f(x) \text{ の最大値が } 2\pi \text{ であるから } \sqrt{a^2 + b^2} + k = 2\pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \left[\sin^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (a \sin x + b \cos x + k)^2 \, dx \\ &= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx + b^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx + k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ &= \pi(a^2 + b^2 + 2k^2) \quad (***) \end{aligned}$$

①を②に代入して

$$\sqrt{a^2 + b^2} + b\pi = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = \pi^2(2 - b)^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ を } (***) \text{ に代入すると } \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx &= \pi^3 \{(2 - b)^2 + 2b^2\} \\ &= 3\pi^3 \left(b - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{8}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

$$b = \frac{2}{3} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } a^2 + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}\pi^2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm \frac{2}{3}\sqrt{4\pi^2 - 1}$$

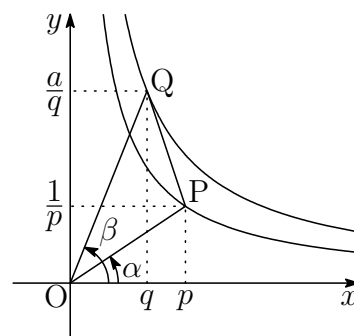
$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx \text{ は, } a = \pm \frac{2}{3}\sqrt{4\pi^2 - 1}, b = \frac{2}{3} \text{ のとき, 最小値 } \frac{8}{3}\pi^3 \text{ をとる. } \blacksquare$$

9 $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle AOQ$ とすると

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{p}}{p} = \frac{1}{p^2}, \quad \tan \beta = \frac{\frac{a}{q}}{q} = \frac{a}{q^2}$$

$\angle POQ = \beta - \alpha > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \angle POQ &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{a}{q^2} - \frac{1}{p^2}}{1 + \frac{a}{q^2} \cdot \frac{1}{p^2}} = \frac{ap^2 - q^2}{p^2q^2 + a} > 0 \quad (*) \end{aligned}$$



3点 $O(0, 0)$, $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(q, \frac{a}{q}\right)$ を頂点とする三角形の面積が3であるから

$$\frac{1}{2} \left| p \cdot \frac{a}{q} - \frac{1}{p} \cdot q \right| = 3 \quad \text{ゆえに} \quad |ap^2 - q^2| = 6pq$$

$a > 1$ および (*) より, $ap^2 - q^2 > 0$ であるから $ap^2 - q^2 = 6pq \quad \cdots (**)$

(**) を (*) に代入して

$$\tan \angle POQ = \frac{6pq}{p^2q^2 + a} = \frac{6}{pq + \frac{a}{pq}} \leq \frac{6}{2\sqrt{pq \cdot \frac{a}{pq}}} = \frac{3}{\sqrt{a}}$$

$\tan \angle POQ$ の最大値が $\frac{3}{4}$ であるから

$$\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{a} = 4$$

よって, 求める a の値は, $a > 1$ に注意して $a = 16$ ■

10 (1) $3^n = k^3 + 1$ より

$$3^n = (k+1)(k^2 - k + 1) \quad \cdots (*)$$

(i) $k = 1$ のとき $3^n = 2$

これを満たす正の整数 n は存在しない.

(ii) $k \geq 2$ のとき, $(*)$ より, $k+1$, $k^2 - k + 1$ は, 共に 3^l (l は自然数) の形で表される. $k^2 - k + 1$ を $k+1$ で割ると

$$k^2 - k + 1 = (k+1)(k-2) + 3$$

ユークリッドの互除法により, $k+1$ と $k^2 - k + 1$ の最大公約数は 3

$$k^2 - k + 1 = k(k-2) + k + 1 \geq k + 1$$

ゆえに $k+1 = 3$ したがって, $k = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$3^n = 9 \quad \text{これを解いて} \quad n = 2$$

よって $(k, n) = (2, 2)$

(2) $3^n = k^2 - 40 \quad \cdots (**)$

法 4 に関して $3 \equiv -1$, $-40 \equiv 0 \pmod{4}$

これを, $(**)$ に適用すると

$$(-1)^n \equiv k^2 \pmod{4}$$

$0^2 \equiv 0$, $(\pm 1)^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから, n は偶数である.

$n = 2m$ において (m は正の整数), $(**)$ に代入すると

$$3^{2m} = k^2 - 40 \quad \text{ゆえに} \quad (k - 3^m)(k + 3^m) = 40$$

$k + 3^m = (k - 3^m) + 2 \cdot 3^m$ より, $k - 3^m$ と $k + 3^m$ の偶奇が一致することに注意すると, $k - 3^m$ と $k + 3^m$ は共に偶数であるから

$$\begin{cases} k - 3^m = 2 \\ k + 3^m = 20 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} k - 3^m = 4 \\ k + 3^m = 10 \end{cases}$$

これを解いて $(k, m) = (11, 2), (7, 1)$

よって $(k, n) = (11, 4), (7, 2)$ ■

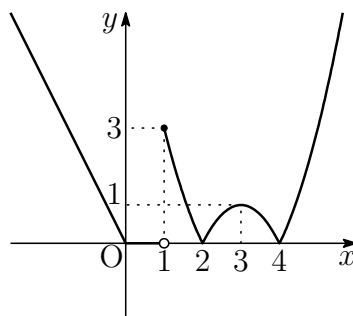
- 11** (1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x) - f(a) \leq 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

$f(x)$ は $x = a$ で微分可能で, 上の左側極限と右側極限が一致するから

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \quad \text{すなわち} \quad f'(a) = 0$$

- (2) 関数 $f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$ のグラフは



よって, 求める実数 a の集合は

$$\{a \mid 0 < a \leq 1, a = 3\}$$

- (3) 本命題は偽である.

$$\text{反例は } f(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

