平成21年度　千葉大学　２次試験前期日程(数学問題)

- 教育学部(数学科教育分野を除く) $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ (90分) 数I・A
- 文(行動科学)・法経学部 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ (90分) 数I・II・A・B
- 園芸学部・教育(情報教育分野) $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ (90分) 数I・II・A・B
- 教育(数学科教育分野) $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ (150分) 数I・II・A・B
- 理学部(生物学科，地球科学科)，工学部(建築学科，都市環境システム学科，デザイン学科) $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{9}$ (120分) 数I・II・III・A・B・C
- 理学部(物理学科，化学科)，薬学部・工学部(機械工学科，メディカルシステム工学科，電気電子工学科，ナノサイエンス学科，共生応用化学科，画像科学科，情報画像学科)，先進科学プログラム $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ (120分) 数I・II・III・A・B・C
- 医学部 $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ (120分) 数I・II・III・A・B・C
- 理学部(数学・情報数理) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{12}$ (180分) 数I・II・III・A・B・C

$\boxed{\mathbf{1}}$ 放物線 $y=x^2\cdots$① と直線 $y=x\cdots$② について次の問いに答えよ．

(1) 放物線①上の点Pに対し，直線②上の点であってPに最も近い点をQとする．Pの x 座標 t とするとき，2点間の距離PQを t を用いて表せ．

(2) (1)で求めた t の関数を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ のグラフをかけ．

(3) (2)の関数 $f(t)$ について $f(t)=\sqrt{2}$ となる t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ △ABCはAB = ACの二等辺三角形とする．∠A，∠Bの大きさをそれぞれ A，B とおく．$A=30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 頂点Aから対辺BCに下ろした垂線をAHとする．ただし，Hは辺BC上の点である．このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ．

(2) $\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ．

3 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする．

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ．

(2) a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p = 5$ であることを示せ．ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう．

4 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある．このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく．

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ．

(2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ．

(3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ．

5 座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 2) を取る．線分 AB 上に点 P を取り，P から x 軸に下ろした垂線を PH，A と H の中点を M とする．ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする．O を原点とし △OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ．

6 n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ．ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である．

(2) 不等式

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ．

(3) 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ．

7 a と k を正の実数とする．$y = \dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする．原点 O を通り，直線 $y = kx$ に垂直な直線を ℓ とする．放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S = S_1 + S_2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) S を a と k を用いて表せ．

(2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする．S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ．

8 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある．このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく．

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ．

(2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ．

(3) X が平方数になる確率を求めよ．ただし，X が平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである．

9 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とし，また実数 $a,\ b$ について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ において常に $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ．

(2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする．同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする．このとき，$y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ．

(3) (2) で定めた $y = g_1(x)$，$y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ．

10 次の問いに答えよ．

(1) 置換 $x = \tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ を求めよ．

(2) $t > 1$ に対して $g(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}}\, dx$ と定める．$t \to \infty$ のとき $g(t) - at^b$ が収束するような正の実数 $a,\ b$ を求めよ．

11 次の問いに答えよ.

(1) 5 以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ.

(2) N を自然数とする．$6N-1$ は，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ.

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ.

12 a を実数とするとき，関数

$$f(x)=x+a^2-2, \quad g(x)=x(x-a)(x-a-2)$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 命題「$f(x) \geqq 0 \Longrightarrow g(x) \geqq 0$」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ.

(2) 命題「$x \geqq 0 \Longrightarrow$「$f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ.

解答例

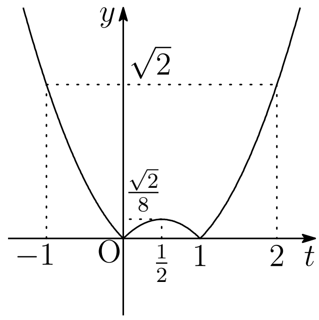
1 (1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $x - y = 0$ にあって最も近い点 Q まで距離は

$$\mathbf{PQ} = \boldsymbol{\frac{|t - t^2|}{\sqrt{2}}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}|t^2 - t| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \end{aligned}$$

$y = f(t)$ のグラフは右図のようになる．



(3) $f(t) = \sqrt{2}$ となるとき　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}|t^2 - t| = \sqrt{2}$　ゆえに　$|t^2 - t| = 2$

このとき，$t^2 - t \geqq -\dfrac{1}{4}$ に注意すると　$t^2 - t = 2$

したがって　$(t+1)(t-2) = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{t = -1,\ 2}$ ■

2 (1) $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2}\tan 75^\circ = \frac{1}{2}\tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

(2) $A = 30^\circ$，$B = \dfrac{180^\circ - A}{2} = 75^\circ$ より

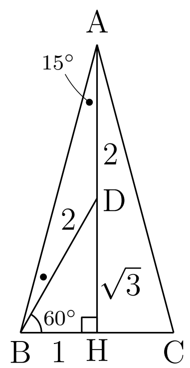
$$\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B = \sin 15^\circ \cos 75^\circ = \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \boldsymbol{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

補足 $\mathrm{BH} = 1$ とすると　$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} = 2,\ \mathrm{DH} = \sqrt{3}$

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{DH}}{2\mathrm{BH}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AB}},\quad \cos B = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AB}} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B &= \frac{1}{\mathrm{AB}^2} = \frac{1}{\mathrm{BH}^2 + \mathrm{AH}^2} \\ &= \frac{1}{1^2 + (2+\sqrt{3})^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(*)\begin{cases} c = 4a + 7b \\ d = 3a + 4b \end{cases}$ より

$$\begin{aligned} c + 3d &= (4a + 7b) + 3(3a + 4b) \\ &= 13a + 19b = -25a + 19(2a + b) \end{aligned}$$

したがって　$(c + 3d) + 25a = 19(2a + b)$

$c + 3d$ が 5 の倍数のとき，上式の左辺は 5 の倍数であるから

$$19(2a + b)$$

は 5 の倍数，よって，$2a + b$ は 5 の倍数である．

(2) $(*)$ より $\begin{cases} 5a = -4c + 7d \\ 5b = 3c - 4d \end{cases}$

c, d がどちらも素数 p の倍数であるとき，上式から

$$5a, \quad 5b$$

はどちらも素数 p の倍数である．素数 p が $p \neq 5$ と仮定すると，a, b はどちらも素数 p の倍数である．このことは，a と b が互いに素であることに反する．よって，素数 p は，$p = 5$ である．■

$\boxed{4}$ (1) 5の倍数，すなわち，番号5のカードを取り出す確率であるから

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

(2) 5の倍数かつ奇数，すなわち，番号5と残り4枚の奇数のカード(番号1,3,7,9)から3枚取り出す確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{4}{9\cdot7\cdot2} = \frac{2}{63}$$

求める確率は，これと(1)の結果から

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{63} = \mathbf{\frac{26}{63}}$$

(3) Xが2の倍数，3の倍数である事象をそれぞれA, Bとすると

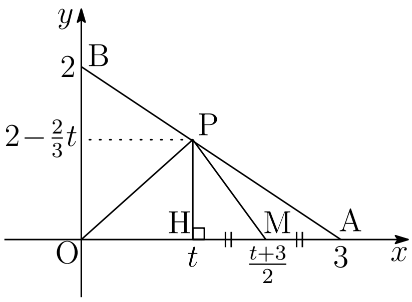
$$P(\overline{A}) = \frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4},\quad P(\overline{B}) = \frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4},\quad P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0$$

よって，Xが6の倍数になる確率は

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= 1 - P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\cap\overline{B})\} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{126} + \frac{15}{126} - 0\right) = \mathbf{\frac{53}{63}} \end{aligned}$$

■

5 線分 AB 上の A と異なる点 P を $\left(t,\ 2-\frac{2}{3}t\right)$ とすると $(0 \leqq t < 3)$



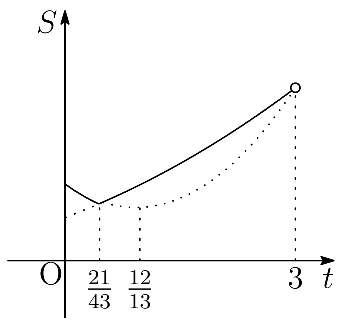
$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= t^2 + \left(2-\frac{2}{3}t\right)^2\\ &= \frac{13}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 4\\ &= \frac{13}{9}\left(t-\frac{12}{13}\right)^2 + \frac{36}{13}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{OM}^2 = \left(\dfrac{t+3}{2}\right)^2$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 - \mathrm{OM}^2 &= \frac{13}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 4 - \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}\right)\\ &= \frac{43}{36}t^2 - \frac{25}{6}t + \frac{7}{4}\\ &= \frac{1}{36}(43t-21)(t-3)\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{S}{\pi} = \begin{cases} \dfrac{13}{9}\left(t-\dfrac{12}{13}\right)^2 + \dfrac{36}{13} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{21}{43}\right)\\ \dfrac{1}{4}(t+3)^2 & \left(\dfrac{21}{43} \leqq t < 3\right)\end{cases}$$



$\dfrac{21}{43} < \dfrac{12}{13}$ であるから，$t = \dfrac{21}{43}$ で S は最小となる．

よって　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{21}}{\mathbf{43}},\ \dfrac{\mathbf{72}}{\mathbf{43}}\right)$

■

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-(k-1)}{k} \leqq n\cdot\underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}}_{k-1\text{ 個}} = \frac{n^k}{2^{k-1}} \qquad \text{(A)}$$

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{k-(k-1)} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{k-j} \qquad \text{(B1)}$$

ここで，$0 \leqq j \leqq k-1$, $k \leqq n$ のとき

$$\frac{n-j}{k-j} - \frac{n}{k} = \frac{k(n-j)-n(k-j)}{k(k-j)} = \frac{j(n-k)}{k(k-j)} \geqq 0 \qquad \text{(B2)}$$

(B1)，(B2) より

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{k-j} \geqq \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，次式が成立する．

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k = 2^n \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

(3) 二項定理および (A) を利用すると

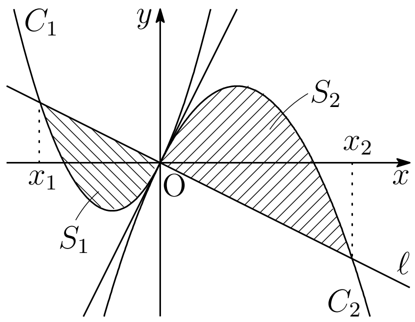
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3\end{aligned}$$

補足 数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は単調増加列[1] であり，(3) の結果から上に有界であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束する (離散型)．また連続型による証明[2] もある．■

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf (p.9 を参照)
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2019.pdf (p.15 を参照)

7 (1) C_1 上の原点における接線が $y=kx$ より



$$C_1 : y = \frac{a}{2}x^2 + kx$$

C_2 上の原点における接線が $y=kx$ より

$$C_2 : y = -\frac{2}{a}x^2 + kx$$

原点を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線 ℓ の方程式は　$y = -\frac{1}{k}x$

C_1 と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{a}{2}x^2 + kx = -\frac{1}{k}x \qquad \text{ゆえに}\quad x\left(\frac{a}{2}x + k + \frac{1}{k}\right) = 0$$

C_1 と ℓ の共有点の x 座標は　$x = 0,\ -\frac{2}{a}\left(k + \frac{1}{k}\right)$

C_2 と ℓ の方程式から y を消去すると

$$-\frac{2}{a}x^2 + kx = -\frac{1}{k}x \qquad \text{ゆえに}\quad x\left(\frac{2}{a}x - k - \frac{1}{k}\right) = 0$$

C_2 と ℓ の共有点の x 座標は　$x = 0,\ \frac{a}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$

$x_1 = -\frac{2}{a}\left(k + \frac{1}{k}\right)$，$x_2 = \frac{a}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_1}^{0} \left\{-\frac{1}{k}x - \left(\frac{a}{2}x^2 + kx\right)\right\} dx = -\frac{a}{2}\int_{x_1}^{0} x\,(x - x_1)\,dx \\ &= \frac{a}{12}(-x_1)^3 = \frac{2}{3a^2}\left(k + \frac{1}{k}\right)^3, \\ S_2 &= \int_{0}^{x_2} \left\{\left(-\frac{2}{a}x^2 + kx\right) - \left(-\frac{1}{k}x\right)\right\} dx = -\frac{2}{a}\int_{0}^{x_2} x(x - x_2)\,dx \\ &= \frac{1}{3a}{x_2}^3 = \frac{a^2}{24}\left(k + \frac{1}{k}\right)^3 \end{aligned}$$

よって　$S = S_1 + S_2 = \boldsymbol{\frac{1}{24}\left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right)\left(k + \frac{1}{k}\right)^3}$

(2) $k = \sqrt{2} - 1$ より　$k + \frac{1}{k} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$

したがって　$S = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right) \geqq \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

よって　$a^2 = \frac{16}{a^2}$　すなわち　$\boldsymbol{a = 2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3}}$ ■

$\boxed{8}$ (1) 5 の倍数，すなわち，番号 5 のカードを取り出す確率であるから

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{8{\cdot}7{\cdot}6}{3{\cdot}2{\cdot}1}{\cdot}\frac{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

(2) X が 4 の倍数，3 の倍数である事象をそれぞれ $A,\ B$ とすると，X が 4 の倍数でない確率 $P(\overline{A})$ は，5 枚の奇数のカードから 4 枚または番号 2，番号 6 のいずれかと奇数のカードを 3 枚を取り出す確率であるから

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_5\mathrm{C}_4 + 2{\cdot}{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{25}{126}$$

3 の倍数でない確率 $P(\overline{B})$ は番号 3, 6, 9 以外の 6 枚のカードから 4 枚取り出す確率であるから

$$P(\overline{B}) = \frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{15}{126}$$

X が 4 の倍数でも 3 の倍数でもない確率 $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ は，番号 1, 2, 5, 7 の 4 枚のカードを取り出す確率であるから

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{1}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{1}{126}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= 1 - P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B}) \\
&= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\cap\overline{B})\} \\
&= 1 - \left(\frac{25}{126} + \frac{15}{126} - \frac{1}{126}\right) = \frac{87}{126} = \boldsymbol{\frac{29}{42}}
\end{aligned}$$

(3) 番号 5，7 を除くカードについて，

$$C = \{2,\ 3,\ 6,\ 8\},\ D = \{1,\ 4,\ 9\}$$

とすると，X が平方数となるのは，次の (i) と (ii) の場合である．

(i) C から 2 枚 $\{2,\ 8\}$ と D から 2 枚取り出す場合で

$$ {}_3\mathrm{C}_2 = 3 \quad (\text{通り}) $$

(ii) C から 3 枚 $\{2,\ 3,\ 6\}$ または $\{3,\ 6,\ 8\}$ と D から 1 枚取り出す場合で

$$2\times 3 = 6 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\displaystyle \frac{3+6}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{9}{9{\cdot}7{\cdot}2} = \boldsymbol{\frac{1}{14}}$ ■

9 (1) $x>0$ において，$f(x)>0$，$g(x)>0$ であるから，

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=xe^{-ax+b}\quad(x>0)$$

とおき，$x>0$ において常に $f(x)\geqq g(x)$，すなわち，$h(x)\leqq 1$ が成り立つための条件を求める．

$a\leqq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$ となるから，$a>0$ であることが必要条件である．$h'(x)=(1-ax)e^{-ax+b}$ より

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって，$h\left(\dfrac{1}{a}\right)\leqq 1$ を満たせばよいから

$$\frac{1}{a}e^{b-1}\leqq 1\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{a\geqq e^{b-1}}\qquad(*)$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ より　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$g_1(x)=e^{-a_1x+b_1}$，$g_2(x)=e^{-a_2x+b_2}$ とおくと

$$g_1'(x)=-a_1e^{-a_1x+b_1},\quad g_2'(x)=-a_2e^{-a_2x+b_2}$$

条件より，$g_1(1)=f(1)$，$g_1'(1)=f_1'(1)$ であるから

$$e^{-a_1+b_1}=1,\ -a_1e^{-a_1+b_1}=-1\quad \text{ゆえに}\quad a_1=1,\ e^{b_1-1}=1\quad\cdots①$$

したがって　$g_1(x)=e^{b_1-1}e^{1-a_1x}=e^{1-x}$

同様に，$g_2(2)=f(2)$，$g_2'(2)=f_2'(2)$ であるから

$$e^{-2a_2+b_2}=\frac{1}{2},\ -a_2e^{-2a_2+b_2}=-\frac{1}{4}\quad \text{ゆえに}\quad a_2=\frac{1}{2},\ e^{b_2-1}=\frac{1}{2}\quad\cdots②$$

したがって　$g_2(x)=e^{b_2-1}e^{1-a_2x}=\dfrac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}$

$y=e^{1-x}$ と $y=\dfrac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}$ を連立すると

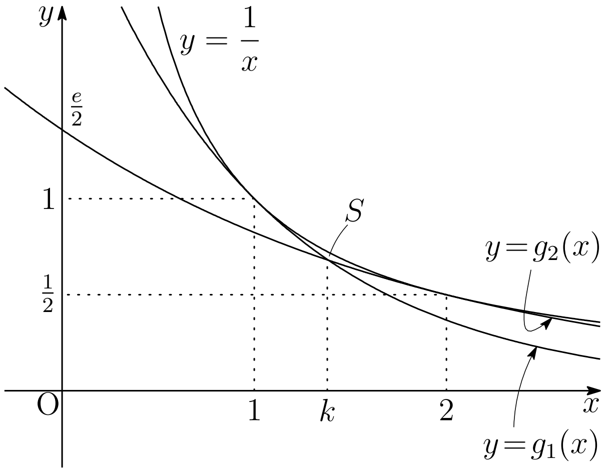
$$e^{1-x}=\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}\quad \text{ゆえに}\quad 1-x=-\log 2+1-\frac{x}{2}$$

これを解いて　$x=2\log 2$　また　$y=e^{1-2\log 2}=ee^{\log\frac{1}{4}}=\dfrac{e}{4}$

よって，求める交点の座標は　$\left(\boldsymbol{2\log 2,\ \dfrac{e}{4}}\right)$

(3) (2) で求めた交点の x 座標を $k=2\log 2$ とおき，求める図形の面積を S とする．①，② が条件 $(*)$ を満たすから，$y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$，$y=\dfrac{1}{x}$ の位置関係に注意して

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^k e^{1-x}\,dx - \int_k^2 \frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \Big[\ \log x\ \Big]_1^2 + \Big[\ e^{1-x}\ \Big]_1^k + \Big[\ e^{1-\frac{x}{2}}\ \Big]_k^2 \\
&= \log 2 + e^{1-k} - e^{1-\frac{k}{2}} = \log 2 + e(e^{-k} - e^{-\frac{k}{2}}) \\
&= \log 2 + e(e^{\log\frac{1}{4}} - e^{\log\frac{1}{2}}) = \log 2 + e\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\log 2 - \frac{e}{4}}
\end{aligned}
$$



■

10 (1) $x=\tan^3\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{3\tan^2\theta}{\cos^2\theta}$

x	$1 \longrightarrow 3\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$
\begin{aligned}
\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\tan^2\theta} - \frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)\frac{3\tan^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta\right)d\theta \\
&= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

(2) $t>1$ に対し，$t=\tan^3\theta_t\ \left(\dfrac{\pi}{4}<\theta_t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，(1) と同様にして

$$\int_1^t\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=3\left(\theta_t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$3\Big[\ \sqrt[3]{x}\ \Big]_1^t-g(t)=3\left(\theta_t-\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって　　$g(t)=3\sqrt[3]{t}-3\left(\theta_t-\dfrac{\pi}{4}+1\right)$

$t\to\infty$ のとき $\theta_t\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$g(t)-at^b=3\sqrt[3]{t}-at^b-3\left(\theta_t-\frac{\pi}{4}+1\right)$$

が $t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束する条件は，次式が収束することである．

$$\lim_{t\to\infty}(3\sqrt[3]{t}-at^b)$$

(i) $0<b<\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\lim_{t\to\infty}(3\sqrt[3]{t}-at^b)=\lim_{t\to\infty}\sqrt[3]{t}\left(3-\frac{a}{t^{\frac{1}{3}-b}}\right)=\infty$$

(ii) $b>\dfrac{1}{3}$ のとき，$a>0$ より

$$\lim_{t\to\infty}(3\sqrt[3]{t}-at^b)=\lim_{t\to\infty}t^b\left(\frac{3}{t^{b-\frac{1}{3}}}-a\right)=-\infty$$

(iii) $b=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\lim_{t\to\infty}(3\sqrt[3]{t}-at^b)=\lim_{t\to\infty}\sqrt[3]{t}\,(3-a)$$

これが収束するとき　$3-a=0$

よって，求める正の実数 a，b は　$\boldsymbol{a=3,\ b=\dfrac{1}{3}}$　■

11 (1) n を自然数とすると，$6n,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4$ は，6 以上で，それぞれ，6 の倍数，2 の倍数，3 の倍数，2 の倍数であるから，5 以上の素数は

$$6n+1 \quad \text{または} \quad 6n-1$$

の形で表される．

(2) (1) の結果から，素数は，法 6 に関して，1 または -1 と合同である．
N を自然数とすると，$6N-1 \equiv -1 \pmod{6}$ である．このとき，

$$(*) \quad 6N-1 = p_1p_2\cdots p_k, \quad p_1 \equiv p_2 \equiv \cdots \equiv p_k \equiv 1 \pmod{6}$$

と仮定すると，法 6 について，$(*)$ の左辺は -1 と合同，$(*)$ の右辺は 1 と合同となり矛盾．よって，$6N-1$ は $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつ．

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数が

$$(*) \quad p_1 = 6n_1-1,\ p_2 = 6n_2-1, \cdots, p_l = 6n_l-1 \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_l)$$

の l 個であると仮定する．

$$M = 6p_1p_2\cdots p_l - 1$$

とおくと，M は，$p_1,\ p_2, \cdots, p_l$ のどれで割っても 5 余る．このことは，(2) の結論による M が $6n-1$ の形の素数を約数にもつことに反する．
よって，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在する．

■

12 (1) $A=\{x\,|\,f(x)\geqq 0\}$，$B=\{x\,|\,g(x)\geqq 0\}$ とすると

$$A=\{x\,|\,2-a^2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,x(x-a)(x-a-2)\geqq 0\}$$

命題「$f(x)\geqq 0 \Longrightarrow g(x)\geqq 0$」がすべての実数 x について成り立つための a が満たすべき条件は，$A\subset B\cdots(*)$ である．

(i) $0<a$ のとき

$$A=\{x\,|\,2-a^2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,0\leqq x\leqq a,\ a+2\leqq x\}$$

$a+2\leqq 2-a^2$ より　$a(a+1)\leqq 0$　すなわち　$-1\leqq a\leqq 0$
これは，このときの a の値ではない．

(ii) $a=0$ のとき

$$A=\{x\,|\,2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,x=0,\ 2\leqq x\}$$

このとき，$(*)$ を満たす．

(iii) $a<0<a+2$，すなわち，$-2<a<0$ のとき

$$A=\{x\,|\,2-a^2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,a\leqq x\leqq 0,\ a+2\leqq x\}$$

$a+2\leqq 2-a^2$ より　$a(a+1)\leqq 0$
a の値の範囲に注意して　$-1\leqq a<0$

(iv) $a=-2$ のとき

$$A=\{x\,|\,-2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,-2\leqq x\}$$

このとき，$(*)$ を満たす．

(v) $a+2<0$，すなわち，$a<-2$ のとき

$$A=\{x\,|\,2-a^2\leqq x\},\quad B=\{x\,|\,a\leqq x\leqq a+2,\ 0\leqq x\}$$

$0\leqq 2-a^2$ より　$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\leqq 0$　すなわち　$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$
これは，このときの a の値ではない．

(i)〜(v) から，a が満たすべき条件は　　$\boldsymbol{a=-2,\ -1\leqq a\leqq 0}$

(2) $C=\{x\,|\,x \geqq 0\}$ とすると，$\overline{C}=\{x\,|\,x<0\}$

命題「$x \geqq 0 \implies$「$g(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」」がすべての実数 x について成り立つための a が満たすべき条件は

$$C \subset A \cup B \quad \text{すなわち} \quad \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{C} \qquad \cdots (**)$$

(i) $0<a$ のとき

$$\overline{A}=\{x\,|\,x<2-a^2\}, \quad \overline{B}=\{x\,|\,x<0,\ a<x<a+2\}$$

$2-a^2 \leqq a$ より　$(a-1)(a+2) \geqq 0$

a の範囲に注意して　$1 \leqq a$

(ii) $a=0$ のとき

$$\overline{A}=\{x\,|\,x<2\}, \quad \overline{B}=\{x\,|\,x<0,\ 0<x<2\}$$

$\overline{A} \cap \overline{B}=\{x\,|\,x<0,\ 0<x<2\}$ より，$(**)$ を満たさない.

(iii) $a<0<a+2$，すなわち，$-2<a<0$ のとき

$$\overline{A}=\{x\,|\,x<2-a^2\}, \quad \overline{B}=\{x\,|\,x<a,\ 0<x<a+2\}$$

$2-a^2 \leqq 0$ より　$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) \geqq 0$

a の範囲に注意して　$-2 \leqq a \leqq -\sqrt{2}$

(iv) $a=-2$ のとき

$$\overline{A}=\{x\,|\,x<-2\}, \quad \overline{B}=\{x\,|\,x<-2\}$$

このとき，$(**)$ を満たす.

(v) $a+2<0$，すなわち，$a<-2$ のとき

$$\overline{A}=\{x\,|\,x<2-a^2\}, \quad \overline{B}=\{x\,|\,x<a,\ a+2<x<0\}$$

このとき，$(**)$ を満たす.

(i)〜(v) から，a が満たすべき条件は　　$\boldsymbol{a \leqq -\sqrt{2},\ 1 \leqq a}$　■