

平成 17 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (自然教育・技術教育・情報教育系) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [15](#) [16](#) [17](#) (180 分)
数 I・II・A・B
- 文 (行動科学)・法経学部 [3](#) [4](#) [5](#) ([12](#) [13](#) のうち 1 問)(90 分)
数 I・II・A・B
- 園芸学部 [4](#) [5](#) [6](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問) (90 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [4](#) [6](#) [8](#) [9](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科)
[7](#) [8](#) [9](#) [10](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・III・A・B・C

1 x は正の実数とし, $x^2 + 4x - 1 = 0$ を満たす.

$$A = 1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3, \quad B = (1 + x)^3$$

とおくとき, $\frac{A}{B}$ の値を求めよ.

2 a は実数とし, x に関する 2 次方程式 $x^2 + ax + (a - 1)^2 = 0$ は相異なる 2 つの実数解をもつ.

- (1) 2 つの解の差の平方を a を用いて表せ.
- (2) 2 つの解の差が整数であるとき a を求めよ.

3 1 から 5 までの数字が書かれたカードが, それぞれ 2 枚ずつ, 合わせて 10 枚ある. この中からカードを 2 枚同時に取り出し, その数字を X, Y とする. ただし, $X \leq Y$ とする.

- (1) $X = Y$ となる確率を求めよ.
- (2) $X = 3$ となる確率を求めよ.
- (3) X の期待値を求めよ.

- 4 数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ である.

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくとき, $\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする.

- (1) $\frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を, b_n , b_{n+1} を用いて表せ.
- (2) $\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき
- (i) 一般項 b_n を求めよ.
- (ii) 一般項 a_n を求めよ.

- 5 a は実数とする. 2つの曲線

$$y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4 \quad \text{と} \quad y = ax^2 - 2a^2x - 3a$$

は, ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ. このとき a を求めよ.

- 6 a を 1 と異なる正の定数とするととき, 次の不等式を満たす (x, y) の範囲を図示せよ.

$$a^{2x} - a^{2y} - a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^x + a^y < 0$$

- 7 (1) 次の不等式で表される領域を図示せよ.

$$\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$$

- (2) x, y が (1) の不等式を満たすとき, $x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

- 8 関数 $f(x) = 3 \cos 2x + 7 \cos x$ について, $\int_0^\pi |f(x)| dx$ を求めよ.

- 9 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $A^3 = E$ となるための必要十分条件を, a, b を用いて表せ.
- (2) (1) の条件が成立するとき, すべての自然数 k ($k = 1, 2, \dots$) に対して

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$$

であることを示せ.

10 以下において $\log x$ は自然対数を表す.

- (1) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $x > 0$ に対し $x^a > \log x$ であることを示せ.
- (2) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$ が成り立つことを示せ.
- (3) $0 < t < \frac{1}{e}$ として, 曲線 $y = x \log x$ ($t \leq x \leq 1$) および x 軸と直線 $x = t$ で囲まれた部分を, y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする. このとき, $\lim_{t \rightarrow +0} V(t)$ を求めよ.

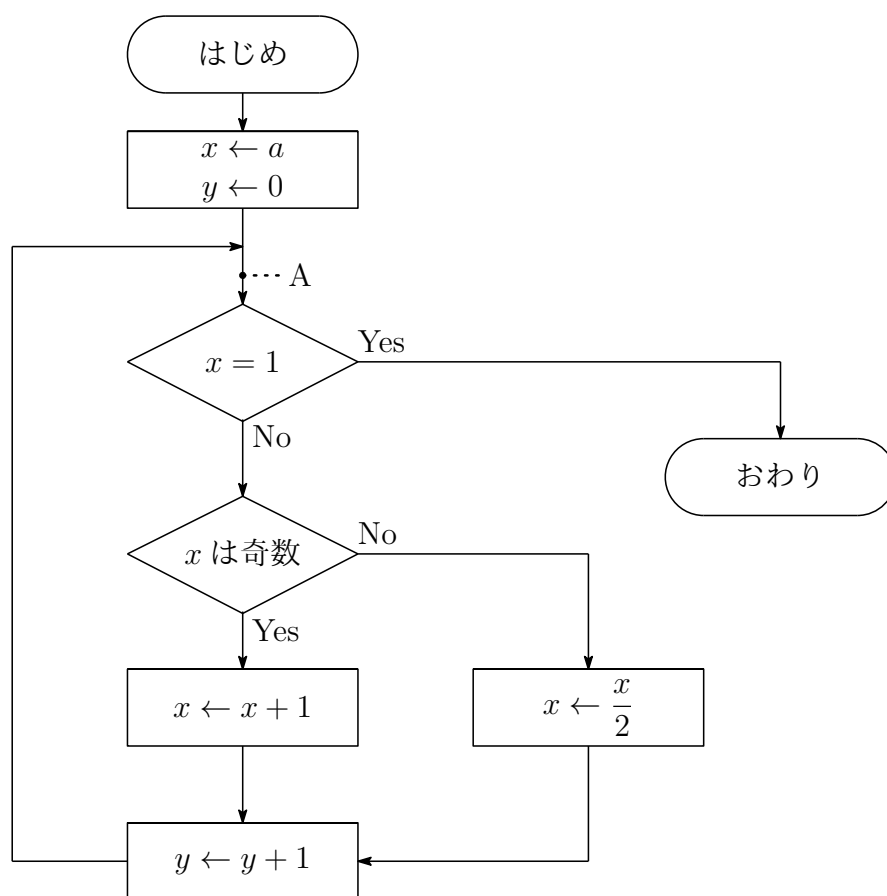
11 n は自然数とし, 2^n は 100 桁の数で, 2^{n-1} は 99 桁の数である.

- (1) n を求めよ.
- (2) 2^n の一の位の数字を求めよ.
- (3) 2^n の十の位の数字を求めよ.

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい.

12 a, k は正の整数とする. 次頁の流れ図のプログラムを実行する.

- (1) $a = 5, 6, 7, 8$ のそれぞれの場合に, このプログラム実行開始から終了までの A 点における x, y の値を作成せよ.
- (2) $a = 9$ のとき, このプログラム実行開始から終了までの A 点における x の値を 2 進法で表示せよ.
- (3) $a = 2^k + 1$ であるとき, プログラム終了時の y の値を k を用いて表せ.



13 α は絶対値 1 の複素数とし、複素数 z に対して、 $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく．ただし $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．

- (1) 複素数平面上で、 z が原点と点 α を通る直線上 (ただし、点 $\frac{\alpha}{2}$ を除く) を動くとき、 w を表す点は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ．
- (2) 複素数平面上で、 z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき、複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか．

14 12 枚のカードがある．このうち 4 枚のカードには数字 0 が書いてあり、残り 8 枚のカードには数字 1 が書いてある．この 12 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出す．このとき、取り出したカードの数字を X, Y, Z とおく．ただし、 $X \leq Y \leq Z$ とする．

- (1) $X = 1$ となる確率 $P(X = 1)$ を求めよ．
- (2) $X + Y + Z$ の期待値 $E(X + Y + Z)$ と分散 $V(X + Y + Z)$ を求めよ．
- (3) $Y = 0$ であるとき、 $Z = 1$ となる条件つき確率を求めよ．

15 $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$ とする． a を $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす定数とする．点 $P(a, 0)$ を通る直線が曲線 $y = f(x)$ 上の点 Q における法線となっている．このとき、 Q の x 座標を $g(a)$ で表す．

- (1) $g(a)$ を求めよ．
- (2) $x_1 = a, x_{n+1} = g(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ によって、数列 $\{x_n\}$ を定める．
 - (i) $X_n = \log x_n - \log \frac{1}{\sqrt{2}} (n = 1, 2, \dots)$ とおくとき、

$$X_{n+1} = \frac{1}{3}X_n$$
 が成り立つことを示せ．
 - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ を求めよ．

16 曲線 $C: y = e^x + 1$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を T とする．

- (1) 線分 PT の長さの最小値とそのときの P, T の座標を求めよ．
- (2) (1) で求めた点 P, T に対して、 T から y 軸に平行に引いた直線と曲線 C との交点を Q とする．曲線 C と線分 PT, TQ で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

17 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとする.

(1) $A^2 = (a+d)A$ が成り立つことを示せ.

(2) $a+d=7$ のとき

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

を満たす A を求めよ.

(3) (2) で求めた A に対して, $\sum_{k=1}^n A^k$ を求めよ.

18 次の問いに答えよ.

(1) 放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれる部分の面積 S を区分求積法で求めよ.

(2) 次の極限值を求めよ.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)(2n+i)}$

解答例

1 $x^2 + 4x - 1 = 0$ より

$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x^2 + 4x - 1)(x - 1) + 8x = 8x$$

$$A = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3, \quad B = (1+x)^3 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{1 + (1+x) + (1+x)^2}{(1+x)^3} + 1 = \frac{x^2 + 3x + 3}{8x} + 1 \\ &= \frac{1}{8} \left(x + 11 + \frac{3}{x} \right) \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ より } (x > 0) \quad x = \sqrt{5} - 2, \quad \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2$$

$$\text{よって} \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{8} \{ (\sqrt{5} - 2) + 11 + 3(\sqrt{5} + 2) \} = \frac{15 + 4\sqrt{5}}{8} \quad \blacksquare$$

2 (1) 2次方程式 $x^2 + ax + (a-1)^2 = 0$ の解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = (a-1)^2$$

2つの解の差の平方は

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 4(a-1)^2 = -3a^2 + 8a - 4 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ (1) の結果から } -3a^2 + 8a - 4 = -3 \left(a - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{4}{3}$$

相異なる2つの実数解の差が整数であるから

$$-3a^2 + 8a - 4 = 1 \quad \text{整理すると} \quad 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (a-1)(3a-5) = 0 \quad \text{よって} \quad a = 1, \frac{5}{3} \quad \blacksquare$$

3 (1) 求める確率は

$$P(X = Y) = \frac{5}{{}_{10}C_2} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

(2) 求める確率は

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(X \geq 3) - P(X \geq 4) \\ &= \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} - \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{15}{45} - \frac{6}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(3) $1 \leq k \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k + 1) \\ &= \frac{{}_{12-2k}C_2}{{}_{10}C_2} - \frac{{}_{10-2k}C_2}{{}_{10}C_2} \\ &= \frac{(12-2k)(11-2k)}{90} - \frac{(10-2k)(9-2k)}{90} \end{aligned} \quad (*)$$

$k = 5$ のときも $(*)$ は成立するから, $1 \leq k \leq 5$ について

$$P(X = k) = \frac{(12-2k)(11-2k)}{90} - \frac{(10-2k)(9-2k)}{90} = \frac{21-4k}{45}$$

よって, 求める期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^5 kP(X = k) = \frac{1}{45} \sum_{k=1}^5 (21k - 4k^2) \\ &= \frac{1}{45} \left(21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 \right) = \frac{5 \cdot 6}{45} \left(\frac{21}{2} - \frac{4 \cdot 11}{6} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{6} = \frac{19}{9} \end{aligned}$$

■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = b_n - b_{n+1}$$

(2) (i) (1) の結果から

$$\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^6 (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_7 = -1456$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ より, } \{b_n\} \text{ の公比を } r \text{ とすると, 条件から}$$

$$2 - 2r^6 = -1456 \quad \text{ゆえに} \quad r^6 = 729$$

$$r > 0 \text{ であるから } r = 3 \quad \text{よって} \quad b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$(ii) \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ より, } n \geq 2 \text{ のとき} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

$$\text{したがって} \quad a_n = 2^n \cdot 3^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから

$$a_n = 2^n \cdot 3^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

■

5 $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$, $g(x) = ax^2 - 2a^2x - 3a$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax - 3a^2, \quad g'(x) = 2ax - 2a^2$$

2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = t$ において共通接線をもつとき

$$f(t) = g(t), \quad f'(t) = g'(t)$$

であるから

$$t^3 + 2at^2 - 3a^2t - 4 = at^2 - 2a^2t - 3a, \quad 3t^2 + 4at - 3a^2 = 2at - 2a^2$$

それぞれ整理すると

$$t^3 + at^2 - a^2t + 3a - 4 = 0, \quad 3t^2 + 2at - a^2 = 0 \quad (*)$$

(*) の第2式から $(3t - a)(t + a) = 0$ ゆえに $t = \frac{a}{3}, -a$

(i) $t = \frac{a}{3}$ を (*) の第1式に代入すると

$$\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{3} + 3a - 4 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 5a^3 - 81a + 108 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (a - 3)(5a^2 + 15a - 36) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a = 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

(ii) $t = -a$ を (*) の第1式に代入すると

$$-a^3 + a^3 + a^3 + 3a - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (a - 1)(a^2 + a + 4) = 0 \quad a \text{ は実数であるから} \quad a = 1$$

$$(i), (ii) \text{ より} \quad a = 1, 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$



6 $a^{2x} - a^{2y} - a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^x + a^y < 0$ より

$$\begin{aligned}(a^x + a^y)(a^x - a^y) - a^{x+y}(a^x - a^y) - (a^x - a^y) &< 0 \\(a^x - a^y)(a^x + a^y - a^{x+y} - 1) &< 0 \\(a^x - a^y)(a^{x+y} - a^x - a^y + 1) &> 0 \\(a^x - a^y)(a^x - 1)(a^y - 1) &> 0\end{aligned}\quad (*)$$

(i) $a > 1$ のとき, $a^x - a^y$, $a^x - 1$, $a^y - 1$ の符号は, それぞれ $x - y$, x , y の符号と一致するから

$$(x - y)xy > 0$$

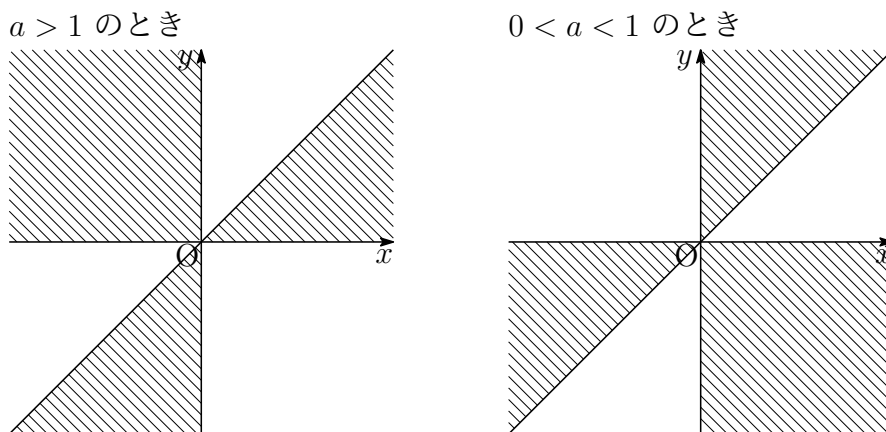
(ii) $0 < a < 1$ のとき, $b = a^{-1}$ とおくと ($b > 1$), (*) より

$$(b^{-x} - b^{-y})(b^{-x} - 1)(b^{-y} - 1) > 0$$

(i) の結果から, $b^{-x} - b^{-y}$, $b^{-x} - 1$, $b^{-y} - 1$ の符号は, それぞれ, $-x - (-y) = -x + y$, $-x$, $-y$ の符号と一致するから

$$(-x + y)(-x)(-y) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x - y)xy < 0$$

(i), (ii) より, (x, y) の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含まない.



7 (1) 与えられた不等式から

$$-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \geq -2x^2 + 2x + 1 > 0$$

したがって $(*) \begin{cases} y^2 + (2x - 1)y - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$

(*) の第 1 式から $y^2 + (2x - 1)y - (x^2 - 1)(x^2 - 2x) \leq 0$

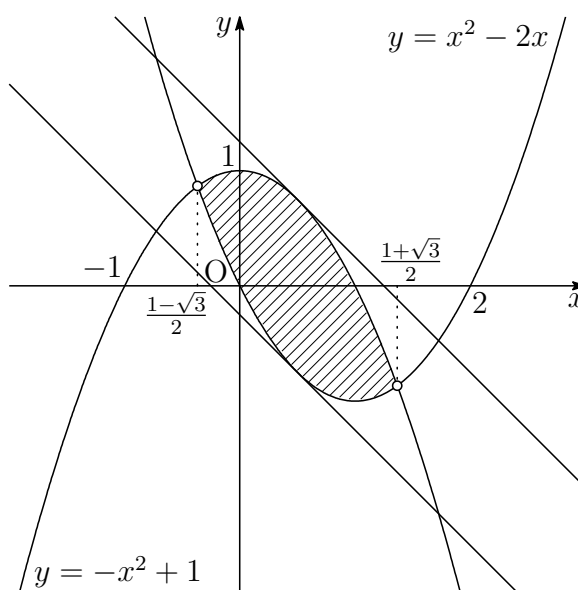
$$(y + x^2 - 1)(y - x^2 + 2x) \leq 0$$

(*) の第 2 式から, $x^2 - 2x < -x^2 + 1$ であることに注意して

$$x^2 - 2x \leq y \leq -x^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) の第 2 式を解いて $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通範囲は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.
ただし, $\circ$ は含まない.



(2) $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 2x$ とおくと

$$f'(x) = -2x, \quad g'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = -1 \text{ とすると } x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$g'(x) = -1 \text{ とすると } x = \frac{1}{2}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

(1) の領域および $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ に注意して

$$\text{最大値 } \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{最小値 } \frac{1}{2} + g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$



8 $f(x) = 3 \cos 2x + 7 \cos x$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(2 \cos^2 x - 1) + 7 \cos x = 6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 \\ &= (3 \cos x - 1)(2 \cos x + 3) \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |f(x)| dx &= \int_0^\alpha (3 \cos 2x + 7 \cos x) dx - \int_\alpha^\pi (3 \cos 2x + 7 \cos x) dx \\ &= \left[\frac{3}{2} \sin 2x + 7 \sin x \right]_0^\alpha - \left[\frac{3}{2} \sin 2x + 7 \sin x \right]_\alpha^\pi \\ &= 3 \sin 2\alpha + 14 \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{よって} \quad \int_0^\pi |f(x)| dx = 3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} + 14 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

■

9 (1) $A^3 = E$ より $\det A^3 = (\det A)^3 = \det E$ ゆえに $\det A = 1$
 A にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると $A^2 + A + E = O \quad \cdots \textcircled{1}$
 このとき $(A - E)(A^2 + A + E) = A^3 - E = O$ ゆえに $A^3 = E$
 したがって、求める必要十分条件は $\det A = 1$

$$a(-a-1) - b \cdot (-1) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{b = a^2 + a + 1}$$

(2) 自然数 k について

$$2^k \not\equiv 2^{k-1}, \quad 2^k \not\equiv 0, \quad 2^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$A^3 = E$ であるから、鳩ノ巣原理により

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = A^2 + A + E = O$$

■

10 (1) $f(x) = x^a - \log x$ とおくと $f'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{ax^a - 1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[a]{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\frac{1}{\sqrt[a]{a}})$	$\nearrow$

最小値は $f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)^a - \log \frac{1}{\sqrt[a]{a}} = \frac{1}{a}(1 + \log a) \quad \cdots (*)$

$a > \frac{1}{e}$ のとき $f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right) = \frac{1}{a}(1 + \log a) > \frac{1}{a}\left(1 + \log \frac{1}{e}\right) = 0$

よって $a > \frac{1}{e}$ のとき $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right) > 0$ すなわち $x^a > \log x$

(2) (*) より, $x^{\frac{1}{e}} - \log x \geq 0$ であるから, $x > 1$ のとき

$$0 < \frac{\log x}{x^a} \leq \frac{x^{\frac{1}{e}}}{x^a} < x^{\frac{1}{e}-a}$$

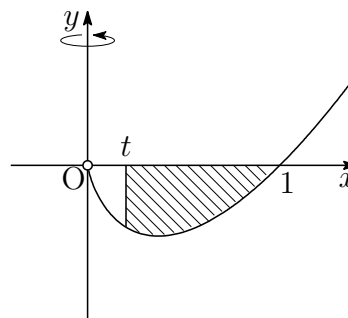
$\frac{1}{e} - a < 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{e}-a} = 0$

したがって, はさみうちの原理により $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0 \quad \cdots (**)$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^a \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log x}{x^a}\right) = 0$

(3) 求める面積を $V(t)$ は

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_t^1 x(-x \log x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} \log x + \frac{x^3}{9} \right]_t^1 \\ &= \frac{t^3}{3} \log t + \frac{1}{9}(1 - t^3) \end{aligned}$$



上式および (2) の結果により

$$\lim_{t \rightarrow +0} V(t) = \lim_{t \rightarrow +0} 2\pi \left\{ \frac{t^3}{3} \log t + \frac{1}{9}(1 - t^3) \right\} = \frac{2}{9}\pi$$

■

11 (1) 条件から $10^{99} \leq 2^n < 10^{100}$, $10^{98} \leq 2^{n-1} < 10^{99}$

$$\text{したがって } \frac{99}{\log_{10} 2} \leq n < \frac{100}{\log_{10} 2}, \quad \frac{98}{\log_{10} 2} + 1 \leq n < \frac{99}{\log_{10} 2} + 1$$

$$\text{上の2式を同時に満たす範囲は } \frac{99}{\log_{10} 2} \leq n < \frac{99}{\log_{10} 2} + 1$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \text{ より } \frac{99}{\log_{10} 2} = \frac{99}{0.3010} = 328.9 \dots$$

よって、求める自然数 n は **$n = 329$**

(2) 法 10 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^4 \equiv 6, \quad 2^5 \equiv 2 \pmod{10}$$

$329 = 4 \cdot 82 + 1$ であるから

$$2^1 \equiv 2^5 \equiv 2^9 \equiv \dots \equiv 2^{329} \equiv 2 \pmod{10}$$

よって、 2^{329} の 1 の位は **2**

(3) 2^n の下 2 桁の数を N とすると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
N	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

$$\text{したがって } 2^2 \equiv 2^{22} \equiv 2^{42} \equiv \dots \equiv 2^{322} \equiv 04 \pmod{100}$$

$$\text{ゆえに } 2^{329} = 2^{322} \cdot 2^7 \equiv 2^2 \cdot 2^7 \equiv 2^9 \equiv 12 \pmod{100}$$

よって 求める 10 の位の数は **1**



12 (1) フローチャートから変数推移表を作成すると

$a = 5$ のとき

x	y
5	0
6	1
3	2
4	3
2	4
1	5

$a = 6$ のとき

x	y
6	0
3	1
4	2
2	3
1	4

$a = 7$ のとき

x	y
7	0
8	1
4	2
2	3
1	4

$a = 8$ のとき

x	y
8	0
4	1
2	2
1	3

(2) $a = 9$ のとき，フローチャートから変数推移表を作成すると

x	y	x の値 (2進法)
9	0	1001
10	1	1010
5	2	101
6	3	110
3	4	11
4	5	100
2	6	10
1	7	1

(3) $a = 2^k + 1$ のとき，フローチャートから変数推移表を作成すると

x	y
$2^k + 1$	0
$2^k + 2$	1
$2^{k-1} + 1$	2
$2^{k-1} + 2$	3
$\vdots$	$\vdots$
$2^2 + 1$	$2k - 4$
$2^2 + 2$	$2k - 3$
$2^1 + 1$	$2k - 2$
$2^1 + 2$	$2k - 1$
$1 + 1$	$2k$
1	$2k + 1$



13 (1) $z \neq \frac{\alpha}{2}$, (*) $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ より ($|\alpha| = 1$)

$$w = \frac{(z - 2\alpha)\bar{\alpha}}{2z - \alpha} = \frac{\frac{z}{\alpha} - 2}{2\left(\frac{z}{\alpha}\right) - 1}\bar{\alpha}$$

$\frac{z}{\alpha}$ が実数であるから, w は原点と $\bar{\alpha}$ を通る直線上にある.

(2) (*) より $(2z - \alpha)w = \bar{\alpha}z - 2$

$$(2w - \bar{\alpha})z = \alpha w - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① の両辺に $w = \frac{\bar{\alpha}}{2}$ を代入すると

$$(2w - \bar{\alpha})z = 0, \quad \alpha w - 2 = \alpha \cdot \frac{\bar{\alpha}}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

となるから, $w \neq \frac{\bar{\alpha}}{2}$. ① から $z = \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}}$

条件 $|z| > 1$ より $\left| \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}} \right| > 1$

$$\begin{aligned} |\alpha w - 2|^2 &> |2w - \bar{\alpha}|^2 \\ (\alpha w - 2)(\overline{\alpha w - 2}) &> (2w - \bar{\alpha})(2\bar{w} - \alpha) \\ |\alpha|^2 |w|^2 + 4 &> 4|w|^2 + |\alpha|^2 \\ |w|^2 + 4 &> 4|w|^2 + 1 \\ |w|^2 &< 1 \\ |w| &< 1 \end{aligned}$$

よって, 点 w は中心が原点, 半径 1 の円の内部を動く.

ただし, 点 $\frac{\bar{\alpha}}{2}$ を除く. ■

$$\boxed{14} \quad (1) \quad P(X = 1) = \frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{55}}$$

$$(2) \quad P(X + Y + Z = 0) = \frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{55}$$

$$P(X + Y + Z = 1) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_8C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{12}{55}$$

$$P(X + Y + Z = 2) = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_8C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{28}{55}$$

$$P(X + Y + Z = 3) = \frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{14}{55}$$

$$\text{よって} \quad E(X + Y + Z) = 0 \cdot \frac{1}{55} + 1 \cdot \frac{12}{55} + 2 \cdot \frac{28}{55} + 3 \cdot \frac{14}{55} = \mathbf{2}$$

$$E((X + Y + Z)^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{55} + 1^2 \cdot \frac{12}{55} + 2^2 \cdot \frac{28}{55} + 3^2 \cdot \frac{14}{55} = \frac{50}{11}$$

よって

$$\begin{aligned} V(X + Y + Z) &= E((X + Y + Z)^2) - \{E(X + Y + Z)\}^2 \\ &= \frac{50}{11} - 2^2 = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad P(Y = 0, Z = 1) = P(X = 0, Y = 0, Z = 1) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_8C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{12}{55}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0, Z = 0) + P(X = 0, Y = 0, Z = 1) \\ &= \frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} + \frac{12}{55} = \frac{13}{55} \end{aligned}$$

よって, $Y = 0$ であるとき, $Z = 1$ となる条件つき確率は

$$\frac{P(Y = 0, Z = 1)}{P(Y = 0)} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}$$

■

15 (1) $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$ より, $f'(x) = -2x$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 Q の x 座標 $g(a)$ を t とすると, Q における法線は

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

これが点 $P(a, 0)$ を通るから

$$t^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2t}(a - t) \quad \text{整理すると} \quad t^3 = \frac{a}{2}$$

よって $g(a) = t = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(2) (1) の結果から $x_{n+1} = g(x_n) = \left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(i) $X_n = \log x_n - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($n = 1, 2, \dots$) であるから

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \log x_{n+1} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \log \left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\log \frac{x_n}{2} - \log \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\log x_n - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3} X_n \end{aligned}$$

(ii) 数列 $\{X_n\}$ は初項 $X_1 = \log x_1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{2}a$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \frac{\log \sqrt{2}a}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \log \sqrt{2}a$$

■

16 (1) $f(x) = e^x + 1$ とおくと $f'(x) = e^x$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式は, $f'(p) = e^p$ より

$$y - (e^p + 1) = e^p(x - p)$$

この曲線と x 軸との交点 T の x 座標は, $y = 0$ より

$$-e^p - 1 = e^p(x - p) \quad \text{ゆえに} \quad x = p - 1 - e^{-p}$$

$P(p, e^p + 1)$, $T(p - 1 - e^{-p}, 0)$ 間の距離を PT とすると

$$\begin{aligned} PT^2 &= (1 + e^{-p})^2 + (e^p + 1)^2 = 1 + 2e^{-p} + e^{-2p} + e^{2p} + 2e^p + 1 \\ &= e^{2p} + 2 + e^{-2p} + e^p + e^{-p} = (e^p + e^{-p})^2 + 2(e^p + e^{-p}) \\ &= (e^p + e^{-p} + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$e^p > 0$, $e^{-p} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係から

$$e^p + e^{-p} \geq 2\sqrt{e^p \cdot e^{-p}} = 2$$

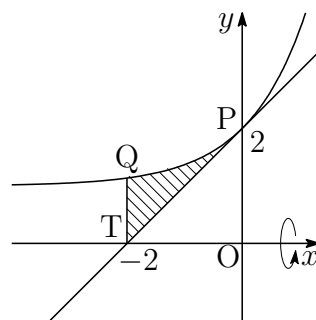
上式において, 等号が成立するとき

$$e^p = e^{-p} \quad \text{すなわち} \quad p = 0$$

よって, $P(0, 2)$, $T(-2, 0)$ のとき, 最小値 $2\sqrt{2}$ をとる.

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^0 (e^x + 1)^2 dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 \\ &= \pi \int_{-2}^0 (e^{2x} + 2e^x + 1) dx - \frac{8}{3}\pi \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x \right]_{-2}^0 - \frac{8}{3}\pi \\ &= \pi \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2}e^{-4} - 2e^{-2} \right) \end{aligned}$$



■

- 17** (1) 行列 A にハミルトン・ケリーの定理に適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

逆行列をもたないから, $ad - bc = 0$ より

$$A^2 = (a + d)A$$

- (2) $a + d = 7$ のとき, $A^2 = 7A$ であるから

$$7A - 2A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- (3) (1), (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^n A^k = \sum_{k=1}^n 7^{k-1} A = \frac{7^n - 1}{7 - 1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{7^n - 1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$



18 (1) 求める面積 S は、区分解法により

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) (i) 区分解法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

(ii) 区分解法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)(2n+i)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(2 + \frac{i}{n}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2+x)} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) dx \\ &= \left[\log(1+x) - \log(2+x) \right]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - \log 3 = \log \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■