

平成 16 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (自然教育・技術教育) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [13](#) [14](#) [15](#) (180 分)
数 I・II・A・B
- 教育学部 (情報教育系) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [12](#) [14](#) ([15](#) [16](#) のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・A・B
- 文 (行動科学)・法経学部 [2](#) [4](#) [5](#) ([10](#) [11](#) のうち 1 問)(90 分)
数 I・II・A・B
- 園芸学部 [3](#) [4](#) [5](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問) (90 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) ([12](#) [13](#) [14](#) のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・III・A・B・C

[1](#) $x^4 + ax^3 + ax^2 + bx - 6$ が整式 $x^2 - 2x + 1$ で割り切れるとき a, b の値を求めよ.

[2](#) 24 枚からなるカードの組がある. この組のそれぞれのカードには 1 から 6 までの数がひとつ書かれており, 各数についてそれぞれ 4 枚ずつある. この組から 2 枚のカードを同時に引く.

- (1) 2 枚のカードの数が同じになる確率を求めよ.
- (2) 2 枚のカードの数の差が 3 以上となる確率を求めよ.
- (3) 2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ.

- 3 正の数 a を初項とする公差 3 の等差数列を $a_1, a_2, a_3, \dots$ とし,

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

とする.

- (1) 一般項 a_n を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, S_n を a と n を用いて表せ.
- (3) 100 以上のすべての n に対して

$$S_n \geq \frac{1}{3a+1}$$

が成立する a の最大値を求めよ.

- 4 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある. 辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき, AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし, AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする.

- (1) AD の長さが $\frac{3}{4}$ であるとき, r の値を求めよ.
- (2) AD の長さを x とおくととき, r^2 を x の式で表せ.
- (3) $\angle DME = \theta$ とおくととき, $\cos \theta = \frac{1}{3}$ となる r の値を求めよ.

- 5 3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

とし, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする.
このとき以下の問いに答えよ.

- (1) b, c を a を用いて表せ.
- (2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を a を用いて表せ.

- 6 $0 < t < 1$ とする. 2 次方程式

$$x^2 - 2tx + 1 = 0$$

の解のひとつを α とする. 複素数平面上の 4 点を $O(0)$, $A(-1)$, $B(1)$, $P(\alpha)$ とし, AB を直径とする円を C とする. 点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする.

- (1) $|\alpha|$ を求めよ.
 - (2) 四角形 $ABPQ$ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ.
- 7 xy 平面上の動点 A は原点 $O(0, 0)$ を出発し, x 軸上を点 $(2, 0)$ まで動くとする. また動点 B は点 $(0, 1)$ を出発し, $AB = OB = 1$ なる条件を満たしながら第 1 象限内を点 $(1, 0)$ まで動くとする. 点 P は線分 AB 上の点で $2BP = OA$ を満たす.

- (1) $\angle AOB = \theta$ とするとき, 点 P の座標を θ で表せ. ただし点 A が点 O と一致するときを除く.
- (2) 点 P の軌跡と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

- 8 n を自然数とする. n 次多項式 $P_n(x)$ は, $n+1$ 個の整数 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して

$$P_n(k) = 2^k - 1$$

を満たす.

- (1) $P_2(x) - P_1(x)$ および $P_3(x) - P_2(x)$ を因数分解せよ.
- (2) $P_n(x)$ を求めよ.

- 9 N を自然数とする.

$$a_1 = N, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(a_n + \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor \right) \right\rfloor \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ. ここで $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

- (1) $a_n \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ を証明せよ.
 - (2) $a_n \leq a_{n+1}$ ならば $a_n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ であることを証明せよ.
- 10 xyz 空間内に点 $A(1, 1, 2)$ と点 $B(-5, 4, 0)$ がある. 点 C が y 軸上を動くとき, 三角形 ABC の面積の最小値を求めよ.

11 x を実数とすると、 $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

- (1) 整数 $\left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor$ を 2 進法で表せ。
- (2) 次の手続きを考える。

- (i) 初期値設定 $b \leftarrow f(a)$, $s \leftarrow 0$ を行う。
- (ii) 次の枠内を $b < c$ となるまで繰り返す :

$s \leftarrow s + b$, $b \leftarrow g(b * r)$ を順次実行する。
- (iii) 上の繰り返し終了後 $t \leftarrow h(s)$ を行う。

定数 a, r, c と関数 f, g, h をそれぞれ $a = \frac{1}{10}$, $r = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $f(x) = \lfloor 2^{10}x \rfloor$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$, $h(x) = 2^{-10}x$ として上の手続きを実行する。このとき (ii) の繰り返しの回数と、実行後の t の値を求めよ。

12 52 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 13 までの数がひとつ書かれており、各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 1 枚目のカードを引き、そのカードに書かれている数を X とする。次にこのカードをもとへ戻さずに 2 枚目のカードを引き、そのカードに書かれている数を Y とする。 X, Y のうちの大きい方の数を Z とする。ただし 2 つの数が同じ場合は、その数を Z とする。

- (1) $X = i$ ($i = 1, 2, \dots, 13$) のとき、 $Y = j$ ($j = 1, 2, \dots, 13$) となる条件つき確率を求めよ。
- (2) $X = Y$ となる確率を求めよ。
- (3) Z の期待値を求めよ。

13 $y = x^2$ のグラフと $y = \frac{1}{4}x^2 + 3$ のグラフで囲まれた図形を F とする。

- (1) 図形 F の面積を求めよ。
- (2) 図形 F を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

14 関数 $f_n(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{n}}$ (n は正の整数) について

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.
ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい.
- (2) 関数 $y = f_n(x)$ のグラフを描け.
- (3) (2) のグラフ上の点で, y 座標を最大にする点を P_n とする. 点 P_n から x 軸に垂線を引き, x 軸との交点を Q_n とする. また, 点 $(1, 0)$ を R とする. 曲線 $y = f_n(x)$ と線分 RQ_n および線分 P_nQ_n で囲まれる部分の面積を S_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ を求めよ.

15] 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ について $AP = PB$ が成り立つ.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (3) 任意の正の整数 n について A^n を求めよ.
- (4) $\sum_{k=1}^n A^k$ を求めよ. ただし, n は正の整数である.

16 $f(x) = x^2 - 11$ とする. 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の任意の点 $(a, f(a))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を $p(a)$ とする. ただし, $a \neq 0$ である.

- (1) $p(a)$ を求めよ.
- (2) $\sqrt{11} < a$ のとき, $\sqrt{11} < p(a) < a$ が成り立つことを示せ.
- (3) $\sqrt{11} < a$ のとき, $p(a) - \sqrt{11} < \frac{1}{2}(a - \sqrt{11})$ が成り立つことを示せ.
- (4) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = p(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) によって, 数列 $\{x_n\}$ を定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{11}$ となることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad f(x) = x^4 + ax^3 + ax^2 + bx - 6 \text{ とすると } f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ であるから

$$2a + b - 5 = 0, \quad 5a + b + 4 = 0$$

これを解いて $\mathbf{a = -3, b = 11}$ ■

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \frac{6 \times {}_4C_2}{{}_{24}C_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{23}}$$

(2) 2枚のカードの差が3以上となる組合せは, 次の6通り.

$$\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{6 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_{24}C_2} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{23}}$$

(3) 2枚のカードの数の和が X となる確率を $P(X)$ とすると

- (i) $X = 2$ となるのは, 2枚のカードがともに1となる場合であり, $X = 12$ となるのは, 2枚のカードがともに6となる場合であるから

$$P(2) = P(12)$$

- (ii) $X = 3$ となるのは, 2枚のカードが $\{1, 2\}$ となる場合であり, $X = 11$ となるのは, 2枚のカードが $\{5, 6\}$ となる場合であるから

$$P(3) = P(11)$$

- (iii) $X = 4$ となるのは, 2枚のカードが $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$ となる場合であり, $X = 10$ となるのは, 2枚のカードが $\{4, 6\}$, $\{5, 5\}$ となる場合であるから

$$P(4) = P(10)$$

- (iv) $X = 5$ となるのは, 2枚のカードが $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ となる場合であり, $X = 9$ となるのは, 2枚のカードが $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ となる場合であるから

$$P(5) = P(9)$$

- (v) $X = 6$ となるのは, 2枚のカードが $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 3\}$ となる場合であり, $X = 8$ となるのは, 2枚のカードが $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 4\}$ となる場合であるから

$$P(6) = P(8)$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ について, $P(7+k) = P(7-k)$ が成立する.

したがって, 求める期待値を $E(X)$ とすると

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=2}^{12} kP(k) \\ &= 7P(7) + \sum_{k=1}^5 \{(7-k)P(7-k) + (7+k)P(7+k)\} \\ &= 7P(7) + 7 \sum_{k=1}^5 \{P(7-k) + P(7+k)\} + \sum_{k=1}^5 k\{P(7+k) - P(7-k)\} \\ &= 7P(7) + 7 \sum_{k=1}^5 \{P(7-k) + P(7+k)\} \\ &= 7 \sum_{k=2}^{12} P(k) = 7 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$



- 3** (1) $\{a_n\}$ は初項 a , 公差 3 の等差数列であるから

$$a_n = a + (n-1) \cdot 3 = \mathbf{a + 3(n-1)}$$

- (2) $a > 0$, $a_{k+1} - a_k = 3$ より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{3}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{a+3(n-1)} \right\} = \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{a\{a+3(n-1)\}}} \end{aligned}$$

- (3) 100 以上のすべての n について, $S_n \geq \frac{1}{3a+1}$ が成立するとき, $a_n > 0$ であるから, $S_{100} \geq \frac{1}{3a+1}$ が成立することが条件である.

$$\frac{99}{a(a+297)} \geq \frac{1}{3a+1} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \leq 99$$

これを満たす正の数 a の最大値は $\mathbf{a = 3\sqrt{11}}$



- 4 (1) $AD = \frac{3}{4}$ であるから $BD = AB - AD = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
 $BM = \frac{1}{2}$, $\angle DBM = 60^\circ$ であるから, $\triangle DBM$ に余弦定理を適用すると

$$r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cos 60^\circ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

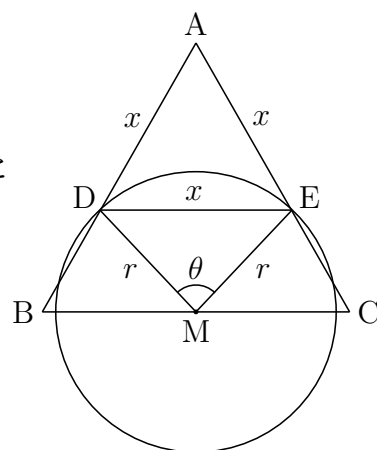
$$r > 0 \text{ であるから } r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- (2) $AD = x$ であるから

$$BD = AB - AD = 1 - x$$

- (1) と同様に, $\triangle DBM$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} r^2 &= (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(1-x) \cdot \frac{1}{2} \cos 60^\circ \\ &= x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$



- (3) $\cos \theta = \frac{1}{3}$ より, $\triangle DME$ に余弦定理を適用すると

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos \theta = r^2 + r^2 - \frac{2}{3}r^2 = \frac{4}{3}r^2$$

$r^2 = \frac{3}{4}x^2$ であるから, これを (2) の結果に代入すると

$$\frac{3}{4}x^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 6x + 3 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意して, これを解くと $x = 3 - \sqrt{6}$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ であるから } r = \frac{\sqrt{3}}{2}(3 - \sqrt{6}) = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}$$

■

- 5** (1) $f(x) = x^3$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ より $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2ax + b$
 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ で共通接線をもつから

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right), \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

したがって $\frac{1}{8} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, \quad \frac{3}{4} = a + b$

上の2式から $b = \frac{3}{4} - a, \quad c = \frac{a}{4} - \frac{1}{2}$

- (2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, (1)の結果から

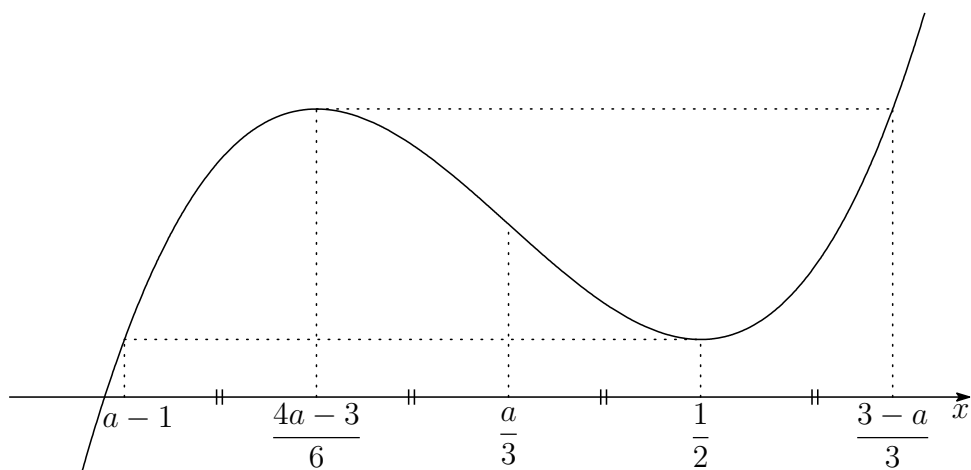
$$h(x) = x^3 - ax^2 + \left(a - \frac{3}{4}\right)x - \frac{a}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 - 2ax + a - \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(3x - 2a + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$h'(x) = 0$ とすると $x = \frac{1}{2}, \frac{4a-3}{6}$

- (i) $a - 1 \leq 0$, すなわち, $a \leq 1$ のとき, 最小値 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

- (ii) $0 < a - 1 \leq \frac{1}{2}$, すなわち, $1 < a \leq \frac{3}{2}$ のとき, 最小値 $h(0) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}$



- (iii) $\frac{1}{2} < \frac{4a-3}{6}$, すなわち, $\frac{3}{2} < a$ のとき
 $h(x)$ を $x = \frac{1}{2}$ を極として展開すると

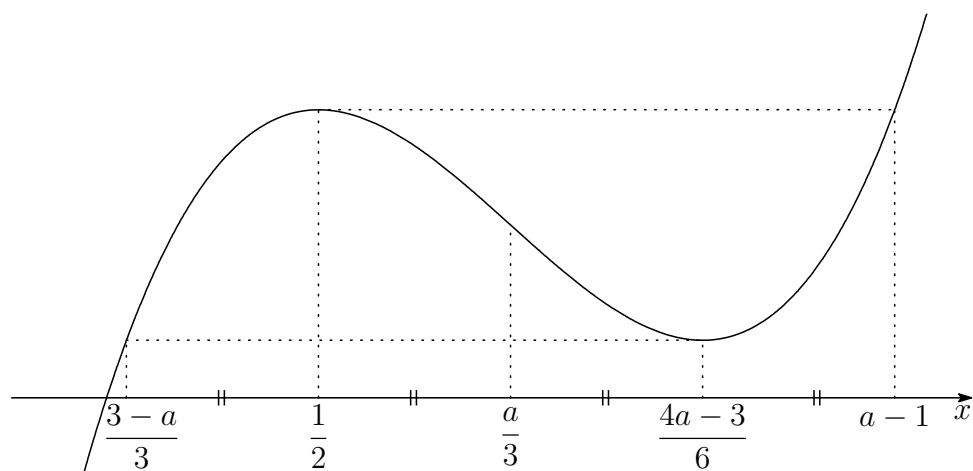
$$\begin{aligned} h(x) &= h\left(\frac{1}{2}\right) + h'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}h''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}h''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$d > 0$ とすると

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2} + d\right) &= \frac{1}{2}h''\left(\frac{1}{2}\right)d^2 + d^3 \\ h\left(\frac{1}{2} - d\right) &= \frac{1}{2}h''\left(\frac{1}{2}\right)d^2 - d^3 \end{aligned}$$

$h\left(\frac{1}{2} - d\right) < h\left(\frac{1}{2} + d\right)$ であるから, $f(0) < f(1)$ より

$$\text{最小値 } h(0) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}$$



(i)~(iii) より, 求める最小値は

$$a \leq 1 \text{ のとき } 0, \quad 1 < a \text{ のとき } -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}$$

補足 3次関数のグラフの特徴を利用する¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_ri.2021.pdf 1

- 6** (1) 2次方程式 $x^2 - 2tx + 1 = 0$ ($0 < t < 1$) $\cdots (*)$ を解くと

$$x = t \pm \sqrt{1-t^2}i \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) の解が α であるから

$$|\alpha|^2 = t^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = 1 \quad \text{よって} \quad |\alpha| = 1$$

別解 2次方程式 $x^2 - 2tx + 1 = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると, $0 < t < 1$ より

$$D/4 = t^2 - 1 < 0$$

2次方程式 (*) の2つの虚数解が $\alpha, \bar{\alpha}$ であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 = 1 \quad \text{よって} \quad |\alpha| = 1$$

- (2) $\alpha = t + \sqrt{1-t^2}i$ としても一般性を失わない.

$\angle BOP = \theta$ とすると ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) $t = \cos \theta$

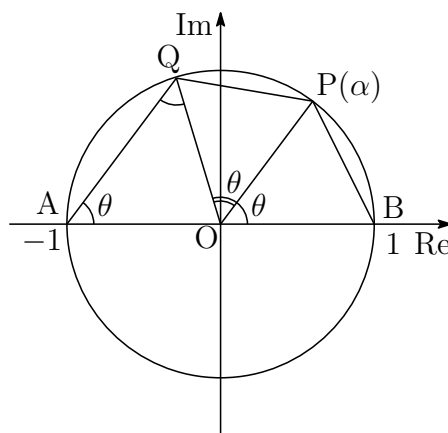
OP//AQ より $\angle AOQ = \pi - 2\theta$ ゆえに $\angle POQ = \theta$

四角形 ABPQ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle BOP + \triangle POQ + \triangle QOA \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin(\pi - 2\theta) \\ &= \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= \cos \theta + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= (\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) \end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		+	0	-	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	



$\theta = \frac{\pi}{3}$ すなわち $t = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



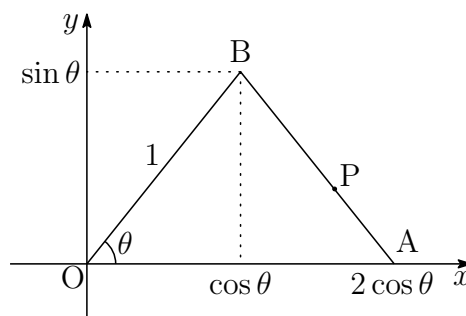
7 (1) $OB = 1$, $\angle AOB = \theta$ より

$$B(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$AB = OB \text{ より } A(2 \cos \theta, 0)$$

$$BA = 1, \quad BP = \frac{1}{2}OA = \cos \theta \text{ より}$$

$$\frac{BP}{BA} = \frac{\cos \theta}{1} = \cos \theta$$



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (2 \cos \theta, 0) - (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, -\sin \theta) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{BP}{BA} \overrightarrow{BA} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + \cos^2 \theta \\ \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって } P(\cos \theta + \cos^2 \theta, \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)$$

(2) $P(x, y)$ とすると, (1) の結果から, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$x = \cos \theta + \cos^2 \theta, \quad y = \sin \theta(1 - \cos \theta) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \\ &= -\sin \theta(1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$2 \rightarrow 0$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta(1 - \cos \theta)(-\sin \theta)(1 + 2 \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{1 - \cos 4\theta}{4} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{4} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin^3 \theta}{3} + \frac{\sin 4\theta}{16} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

別解 $P(x, y)$ について

$$x = \frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad y = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

であるから

$$x' = \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta - \sin 2\theta, \quad y' = \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \cos 2\theta$$

上の諸式から

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= \left(\frac{1}{2} + \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) (\cos \theta - \cos 2\theta) \\ &\quad - (-\sin \theta - \sin 2\theta) \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta - \cos 2\theta) + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - \frac{1}{2} (\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta) \end{aligned}$$

求める面積を S とすると、ガウス・グリーンの定理により ²

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (xy' - x'y) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta + \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

² <http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai.2016.pdf> [5] 別解を参照.

8 (1) $P_0(0) = 2^0 - 1 = 0$, $P_0(x)$ は定数より $P_0(x) = 0$

条件から $P_1(0) - P_0(0) = (2^0 - 1) - (2^0 - 1) = 0$

$P_1(x) - P_0(x)$ は 1 次式であり, 因数定理により

$$P_1(x) - P_0(x) = a_1x \quad (a_1 \text{ は定数})$$

$P_1(1) = 2^1 - 1 = 1$, $P_0(1) = 0$ であるから

$$1 - 0 = a_1 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = 1, \quad P_1(x) - P_0(x) = x$$

$P_0(x) = 0$ であるから $P_1(x) = x$

条件から $P_2(k) - P_1(k) = (2^k - 1) - (2^k - 1) = 0 \quad (k = 0, 1)$

$P_2(x) - P_1(x)$ は 2 次式であり, 因数定理により

$$P_2(x) - P_1(x) = a_2x(x - 1) \quad (a_2 \text{ は定数})$$

$$P_2(x) = a_2x(x - 1) + x$$

$P_2(2) = 2^2 - 1 = 3$ であるから $3 = 2a_2 + 2$ ゆえに $a_2 = \frac{1}{2}$

したがって $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x - 1) + x$

条件から $P_3(k) - P_2(k) = (2^k - 1) - (2^k - 1) = 0 \quad (k = 0, 1, 2)$

$P_3(x) - P_2(x)$ は 3 次式であり, 因数定理により

$$P_3(x) - P_2(x) = a_3x(x - 1)(x - 2) \quad (a_3 \text{ は定数})$$

$$P_3(x) = a_3x(x - 1)(x - 2) + \frac{1}{2}x(x - 1) + x$$

$P_3(3) = 2^3 - 1 = 7$ であるから $7 = 6a_3 + 3 + 3$ ゆえに $a_3 = \frac{1}{6}$

したがって $P_3(x) = \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2) + \frac{1}{2}x(x - 1) + x$

よって $P_2(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}x(x - 1)$

$$P_3(x) - P_2(x) = \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2)$$

(2) (1) の結果から

$$(*) \quad P_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \prod_{i=1}^j (x - i + 1)$$

であると推測する.

[1] $n = 1$ のとき, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \prod_{i=1}^j (x - i + 1) \quad (A)$$

条件から $P_{k+1}(l) - P_k(l) = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, k)$

$P_{k+1}(x) - P_k(x)$ は, $k + 1$ 次式であり, 因数定理により

$$P_{k+1}(x) - P_k(x) = a_{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} (x - i + 1) \quad (a_{k+1} \text{ は定数})$$

上式に $x = k + 1$ を代入すると

$$(**) \quad P_{k+1}(k + 1) - P_k(k + 1) = a_{k+1}(k + 1)!$$

条件および $(*)$ より

$$\begin{aligned} P_{k+1}(k + 1) &= 2^{k+1} - 1 \\ P_k(k + 1) &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \prod_{i=1}^j (k + 2 - i) = \sum_{j=1}^k \frac{(k + 1)!}{j!(k + 1 - j)!} \\ &= \sum_{j=1}^k {}_{k+1}C_j = 2^{k+1} - 2 \end{aligned}$$

上の 2 式を $(**)$ に代入すると

$$(2^{k+1} - 1) - (2^{k+1} - 2) = a_{k+1}(k + 1)! \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k + 1)!}$$

$$\text{したがって} \quad P_{k+1}(x) - P_k(x) = \frac{1}{(k + 1)!} \prod_{i=1}^{k+1} (x - i + 1) \quad (B)$$

$$(A), (B) \text{ の辺々を加えると } P_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j!} \prod_{i=1}^j (x - i + 1)$$

よって, $n = k + 1$ のときも成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ は成立する. ■

9 (1) (*) $a_n \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$

$$[1] \quad a_1 = N \quad (N \text{ は自然数}) \text{ より } a_1 = N \geq \sqrt{N} \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$$

$n = 1$ のとき, (*) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (*) が成立すると仮定すると, a_k は整数であるから

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(a_k + \left\lfloor \frac{N}{a_k} \right\rfloor \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \left[a_k + \frac{N}{a_k} \right] \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2\sqrt{N} \rfloor \right\rfloor$$

$$\lfloor 2\sqrt{N} \rfloor \in (2\sqrt{N} - 1, 2\sqrt{N}] \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2} \lfloor 2\sqrt{N} \rfloor \in \left(\sqrt{N} - \frac{1}{2}, \sqrt{N} \right] \subset (\sqrt{N} - 1, \sqrt{N}]$$

区間 $(\sqrt{N} - 1, \sqrt{N}]$ にある整数は唯一 $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ であるから

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \lfloor 2\sqrt{N} \rfloor \right\rfloor = \lfloor \sqrt{N} \rfloor \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$$

よって, $n = k + 1$ のときも, (*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (*) が成立する.

(2) a_n は整数であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left\lfloor \frac{1}{2} \left(a_n + \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor \right) \right\rfloor - a_n = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor - a_n \right) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{2} \left[\frac{N}{a_n} - a_n \right] \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \left[\frac{(\sqrt{N} + a_n)(\sqrt{N} - a_n)}{a_n} \right] \right\rfloor \end{aligned}$$

$a_{n+1} - a_n \geq 0$, $a_n > 0$ であるから

$$\sqrt{N} - a_n \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_n \leq \sqrt{N}$$

a_n は整数であるから $a_n \leq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$

上式および (1) の結論から $a_n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$

■

10 点 C の座標を $(0, t, 0)$ とすると

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 3, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, t-1, -2)$$

したがって

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{49(t^2 - 2t + 6)^2 - (3t + 7)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{40t^2 - 140t + 245} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{40 \left(t - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{490}{4}} \end{aligned}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積の最小値は $\frac{7\sqrt{10}}{4}$

11 (1) $\left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1024}{10} \right\rfloor = 102 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 = \mathbf{1100110}_{(2)}$

(2) 変数推移表は、次のようになる.

	s	b
初期値	0	102
1	102	51
2	153	25
3	178	12
4	190	6
5	196	3
6	199	1
7	200	0

(ii) の繰り返しは **7** 回

$$t = h(200) = 2^{-10} \times 200 = \frac{25}{128}$$

- 12** (1) 2回目に1回目と異なるカードを取り出す確率

$$i \neq j \text{ のとき } P_{X=i}(Y=j) = \frac{4}{51}$$

2回目に1回目と同じカードを取り出す確率

$$i = j \text{ のとき } P_{X=i}(Y=j) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

- (2) 2回目に1回目と同じカードを取り出す確率であるから, (1)の結果から

$$P(X=Y) = \frac{1}{17}$$

- (3) $k > 1$ のとき, $P(Z=k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$ より

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \frac{{}^{4k}\text{C}_2}{{}^{52}\text{C}_2} - \frac{{}^{4(k-1)}\text{C}_2}{{}^{52}\text{C}_2} \\ &= \frac{2}{52 \cdot 51} \left\{ \frac{4k(4k-1)}{2} - \frac{(4k-4)(4k-5)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (*)$$

(*) より, $k=1$ のときも成立するから

$$P(Z=k) = \frac{8k-5}{13 \cdot 51}$$

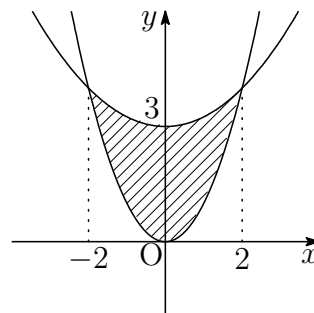
したがって, 求める期待値は

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^{13} kP(X=k) = \frac{1}{13 \cdot 51} \sum_{k=1}^{13} (8k^2 - 5k) \\ &= \frac{1}{13 \cdot 51} \left(8 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} - 5 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} \right) = \frac{469}{51} \end{aligned}$$

■

13 (1) 図形 F の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 3 - x^2 \right) dx \\ &= -\frac{3}{4} \int_{-2}^2 (x+2)(x-2) dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} (2+2)^3 = 8 \end{aligned}$$



(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-2}^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^2 + 3 \right)^2 - (x^2)^2 \right\} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{4}x^2 + 3 \right) (2+x)(2-x) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_{-2}^2 \left\{ 8 - \frac{5}{4}(2+x)(2-x) \right\} (2+x)(2-x) dx \\ &= 6 \int_{-2}^2 (2+x)(2-x) dx - \frac{15}{16} \int_{-2}^2 (2+x)^2(2-x)^2 dx \\ &= 6 \times \frac{1}{3!} \cdot 4^3 - \frac{15}{16} \cdot \frac{2!2!}{5!} \cdot 4^5 \\ &= 4^3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 32 \end{aligned}$$

よって $V = 32\pi$

補足 次の公式³

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している. ■

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

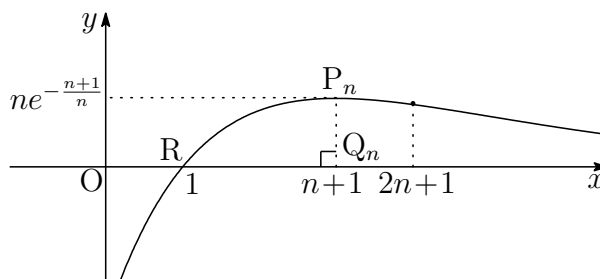
14 (1) $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{n}}$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}} = 0$$

$$(2) \quad f'(x) = -\frac{1}{n}(x-n-1)e^{-\frac{x}{n}}, \quad f''(x) = \frac{1}{n^2}(x-2n-1)e^{-\frac{x}{n}}$$

x	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$	$2n+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-\frac{x}{n}} = -\infty$$



(3) (2) のグラフから

$$\begin{aligned} S_n &= \int_1^{n+1} (x-1)e^{-\frac{x}{n}} dx \\ &= -n \left[e^{-\frac{x}{n}} \{ (x-1) + n(x-1)' \} \right]_1^{n+1} \\ &= -n \left[e^{-\frac{x}{n}} \{ (x-1) + n \} \right]_1^{n+1} \\ &= -2n^2 e^{-\frac{n+1}{n}} + n^2 e^{-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{S_n}{n^2} = -2e^{-\frac{n+1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = 1 - \frac{2}{e}$$

補足 次の積分公式を利用している⁴.

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots \right\} + C$$

■

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math-2015-kouki.pdf (p.7)

15 (1) $AP = PB$ より
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3a-2 & 3b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 2b \end{pmatrix}$$

各成分を満たすことに注意して $\mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{b} = \mathbf{2}$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから $P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = PBP^{-1}$ より

$$\begin{aligned} A^n &= (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{2} - \mathbf{2}^n & -1 + \mathbf{2}^n \\ \mathbf{2} - \mathbf{2}^{n+1} & -1 + \mathbf{2}^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A^k &= \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 2 - 2^k & -1 + 2^k \\ 2 - 2^{k+1} & -1 + 2^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{2n} + \mathbf{2} - \mathbf{2}^{n+1} & -\mathbf{n} - \mathbf{2} + \mathbf{2}^{n+1} \\ \mathbf{2n} + \mathbf{4} - \mathbf{2}^{n+2} & -\mathbf{n} - \mathbf{4} + \mathbf{2}^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

16 (1) $f(x) = x^2 - 11$ より, $f'(x) = 2x$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 - 11) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 - 11$$

この曲線の x 軸との共有点の x 座標は ($a \neq 0$)

$$2ax - a^2 - 11 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 11}{2a}$$

$$\text{よって} \quad p(a) = \frac{a^2 + 11}{2a}$$

(2) $\sqrt{11} < a$ のとき, (1) の結果から

$$p(a) - \sqrt{11} = \frac{a^2 + 11}{2a} - \sqrt{11} = \frac{(a - \sqrt{11})^2}{2a} > 0,$$

$$a - p(a) = a - \frac{a^2 + 11}{2a} = \frac{a^2 - 11}{2a} > 0$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{11} < p(a) < a$$

(3) $\sqrt{11} < a$ のとき

$$\begin{aligned} p(a) - \sqrt{11} &= \frac{(a - \sqrt{11})}{2a} = \frac{a - \sqrt{11}}{2a} (a - \sqrt{11}) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2a} \right) (a - \sqrt{11}) < \frac{1}{2} (a - \sqrt{11}) \end{aligned}$$

(4) (2) の結論から $\sqrt{11} < x_n$ のとき $\sqrt{11} < p(x_n) = x_{n+1}$

$$\text{したがって} \quad 0 < x_{n+1} - \sqrt{11} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, (3) の結論から

$$x_{n+1} - \sqrt{11} = p(x_n) - \sqrt{11} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{11}) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $\sqrt{11} < x_n$ のとき

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{11} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{11})$$

$x_1 = 4 > \sqrt{11}$ であるから

$$0 < x_n - \sqrt{11} < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (x_1 - \sqrt{11})$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt{11}) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{11}$$

